Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

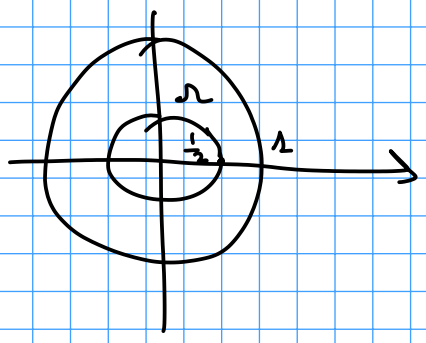
Lezione 56 07/5/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

SUPERFICI E INTEGRALI DI SUPERFICIE

ESEMPIO Calcolare

$$\iint_S \frac{1}{z^4}\, d\sigma \qquad \text{dove} \quad S = \left\{ z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1 \le z \le 2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$



$z = f(x,y)$ S è un grafico

devo solo capire chi è

$\Omega = \{(x,y) : 1 \le \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 2\} =$

$\Omega = \{ \frac{1}{4} \le x^2+y^2 \le 1 \} =$

"ANELLO" CON RAGGIO INTERNO $r = \frac{1}{2}$ e raggio esterno $R = 1$

È chiaro che $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ è ben definita, C^1, su $\Omega \not\ni 0$

$$\iint_S \frac{1}{z^4}\, d\sigma = \qquad \left(\begin{array}{l} \Gamma(x,y) = (x,y,f(x,y)) \\ \|\vec{N}\| = \sqrt{1+|\nabla f|^2(x,y)} \end{array} \right)$$

$$\iint_\Omega \frac{1}{f^4(x,y)} \sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}\, dx\, dy = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right.$$

$$= \iint_{\bar\Omega} (x^2+y^2)^2 \sqrt{1+\frac{1}{(x^2+y^2)^2}}\, dx\,dy$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ |\nabla f(x,y)|^2 = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^3} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^3} = \\ \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

$$= \iint_{\bar\Omega} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} \sqrt{(x^2+y^2)^2+1}\, dx\,dy$$

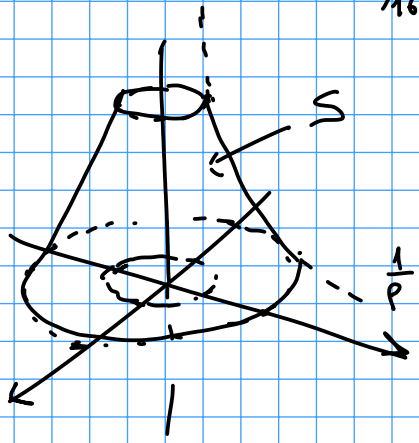
$$= \iint_{\bar\Omega} (x^2+y^2) \sqrt{1+(x^2+y^2)^2}\, dx\,dy =$$

(COORD. POLARI)

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/2}^{1} \rho^2 \sqrt{1+\rho^4}\, \rho\, d\rho = 2\pi \int_{\frac{1}{16}}^{1} \sqrt{1+s}\, \frac{ds}{4} \cdot \qquad \left(s=\rho^4 \;\; ds = 4\rho^3 d\rho \right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{3}(1+s)^{3/2} \right]_{1/16}^{1} = \frac{\pi}{3}\left(2^{3/2} - \left(\frac{17}{16}\right)^{3/2} \right) = \frac{\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - \frac{17\sqrt{17}}{64} \right)$$

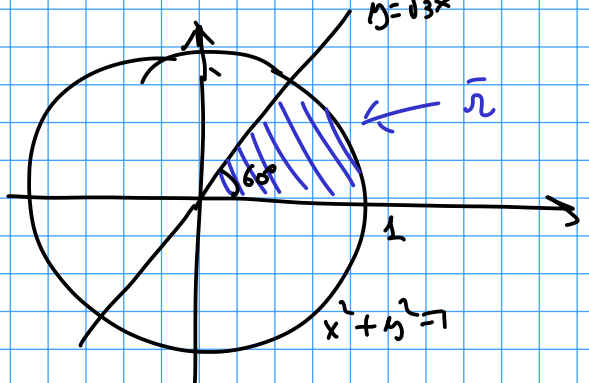
$$(2^4)^{3/2} = 2^6$$



ESERCIZIO $\iint_S z^2\, d\sigma \qquad S = \{ z = xy \;\; 0 \le y \le \sqrt{3}x \;,\; x^2+y^2 \le 1 \}$

È chiaro che S è il grafico di

$f(x,y) = xy$ su $\bar\Omega = \{ 0 \le y \le \sqrt{3}x, \;\; x^2+y^2 \le 1 \}$



$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$$

$$\| \vec{N} \| = \sqrt{1+x^2+y^2}$$

DUNQUE L'INTEGRALE $\longrightarrow$

$$\iint_{\Omega} x^2 y^2 \sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\, dy \qquad \text{(coordinate polari)}$$

$$x = \rho\cos\vartheta \qquad y = \rho\sin\vartheta \quad \Rightarrow$$

$0 \le \rho \le 1$ $\qquad 0 \le \rho\sin\vartheta \le \sqrt{3}\,\rho\cos\vartheta \iff 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$ e $\tan(\vartheta) \le \sqrt{3}$

$\Downarrow$

$0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/3} d\vartheta \int_0^1 \rho^2\cos^2 \rho^2\sin^2 \sqrt{1+\rho^2}\ \rho\, d\rho$$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi/3} \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta}_{①} \underbrace{\int_0^1 \rho^5\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho}_{②}$$

$$① = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{4}\sin^2(2\vartheta)\, d\vartheta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} \frac{(1-\cos(4\vartheta))}{2} d\vartheta = \frac{1}{8}\left[\vartheta - \frac{\sin(4\vartheta)}{4}\right]_0^{\pi/3} =$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)}{4}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sin(\pi/3)}{4}\right) = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{64}$$

($\frac{4}{3}\pi = \pi + \frac{\pi}{3}$)

$$② = \quad s = \rho^2 \quad ds = 2\rho\, d\rho \quad \longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 s^2\sqrt{1+s}\, ds$$

$$\sqrt{1+s} = t \qquad 1+s = t^2 \qquad ds = 2t\, dt \qquad s^2 = (t^2-1)^2$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)^2\, t\, 2t\, dt = \int_1^{\sqrt{2}} t^2(t^4-2t^2+1)\, dt =$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} (t^6 - 2t^4 + t^2)\, dt = \left[\frac{t^7}{7} - \frac{2}{5}t^5 + \frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \dots \dots$$

$$\left(\frac{2}{105}(11\sqrt{2}-4)\right)$$

SUPERFICI (PARAMETRICHE) ORIENTATE e "verso del bordo"

Def. Chiamo superficie parametrica ORIENTATA una sup. param. S + scelta di un versore normale $\hat{\nu}$ continuo su S:

In alti termini dare un'orientazione su S SIGNIFICA SCEGLIERE un verso sulla retta normale a S (che varia con continuità)

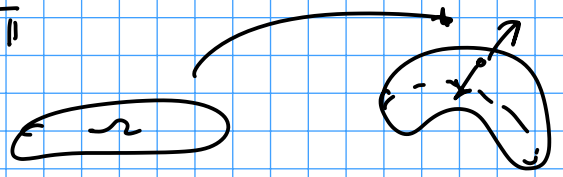
MATEMATICAMENTE $(S, \hat{\nu})$ dove S è una superficie e $\hat{\nu}: S \to \mathbb{R}^3$ è un vettore normale con $\|\hat{\nu}\| = 1$

RICORDIAMO che Ω CONNESSO $\to$ $\forall\, p_1, p_2 \in \Omega$ esiste una curva in Ω che congiunge p_1 e p_2

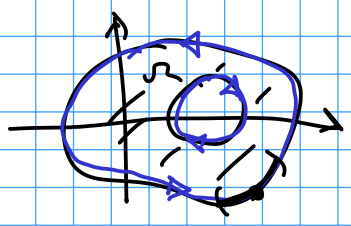
FATTO: Se Ω è connesso e S si parametrizza con una $T: \Omega \to S$ ci sono due possibili scelte di $\hat{\nu}$ che rendono S una superficie orientata:

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} \quad \text{oppure} \quad \vec{\nu} = -\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$$

dove $\vec{N} = \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}$



RICORDIAMO che stiamo prendendo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Ω LIMITATO regolare (e dotti)



$\Omega = \{ G(x,y) < 0 \}$ e

G C^1 $\nabla G \neq \vec{0}$ su $G = 0$

(o intersezione di un numero finito di vincoli di questo tipo)

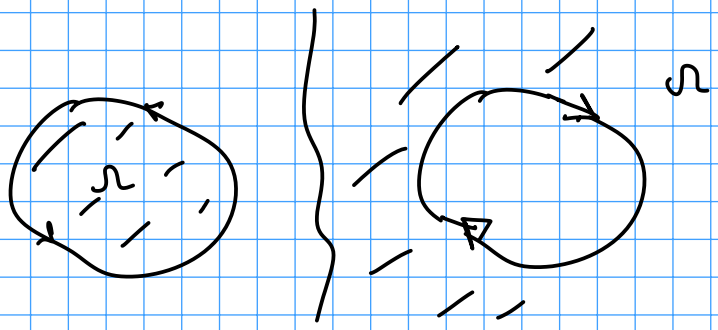
SE Ω è regolare LIMITATO $\Rightarrow$ $\partial\Omega = \{G=0\}$ è descritto da un numero finito di curve chiuse regolari

(localmente lo deduco da Dini; la limitatezza di Ω mi dice che sono un numero finito di curve chiuse)

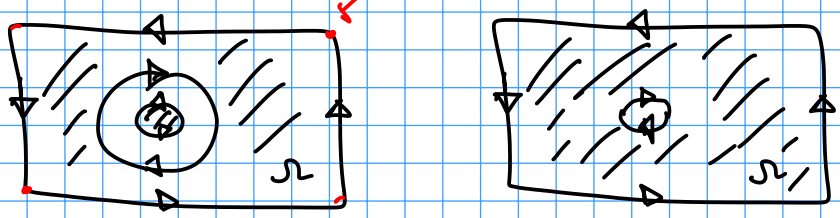
descritto $\to$ $\exists\ \gamma_1, \dots, \gamma_k : \gamma_i : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ curve regolari, $\gamma_i(a) = \gamma_i(b)$,

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} \gamma_i([0,b])$$

INOLTRE POSSO IMPORRE CHE queste curve γ_i ABBIANO VERSO COERENTE CON Ω. INTUITIVAMENTE VOGLIO CHE percorrendo ogni curva γ_i (sul bordo di Ω) l'aperto Ω "rimane a sinistra"

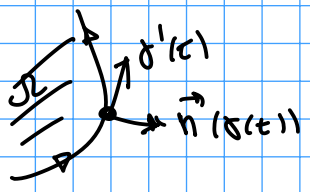


SPIGOLI (REGOLARE A TRATTI)



DUNQUE SE $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ È REGOLARE (REGOLARE A TRATTI) SONO DEFINITE k CURVE CHIUSE CHE DESCRIVONO IL BORDO $\partial\Omega$ CON UN VERSO COERENTE CON Ω

RIGOROSAMENTE

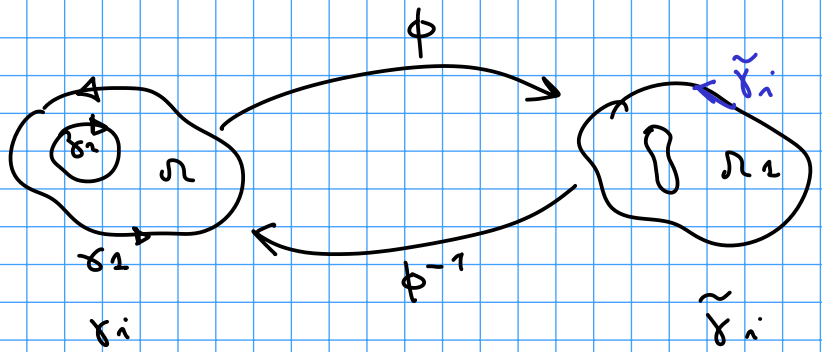


$\vec{n}$ e γ' sono trasformabili in $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ con una matrice di determinante >0

LEMMA Supponiamo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, regolare e connesso. Supponiamo $\Phi : \overline{\Omega} \to \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ sia un diffeomorfismo. ALLORA

(a) Ω_1 è connesso

(b) il segno del determinante $\det J_\Phi(x,y)$ $(\neq 0)$ è costante (o sempre >0 o sempre <0)



(c) Se $\gamma_1 \cdots \gamma_n$ descrivono il bordo di Ω

$\tilde{\gamma}_1 \cdots \tilde{\gamma}_m$ descrivono il bordo di Ω_1

$\Rightarrow n = m$ e posto

$\hat{\gamma}_1 \cdots \hat{\gamma}_m$ definite $\hat{\gamma}_i = \Phi \circ \gamma_i$

allora $\hat{\gamma}_1 \cdots \hat{\gamma}_n$ descrivono il bordo di Ω_1 e si ha

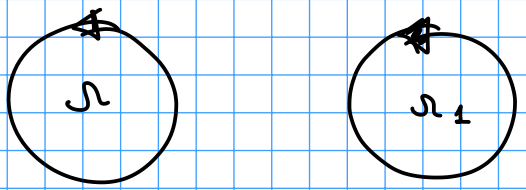
$\hat{\gamma}_i'$ e $\tilde{\gamma}_i'$ sono concordi (quando $\det J_\phi > 0$)

$\hat{\gamma}_i'$ e $\tilde{\gamma}_i'$ sono discordi (quando $\det J_\phi < 0$)

ESEMPIO

$\Omega = \{x^2 + y^2 < 1\}$

$\partial\Omega = \{x^2 + y^2 = 1\}$



$\partial\Omega$ è descritto da $\gamma(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}$ (il verso è corretto...)

$\phi(x,y) = (x,-y)$ è un diffeomorfismo $\det J_\phi = -1$

$\phi(\Omega) = \Omega$ $\tilde{\gamma} = \gamma$

$\hat{\gamma}(t) = \phi(\gamma(t)) = \cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j}$ ← discorde con $\tilde{\gamma} = \gamma$

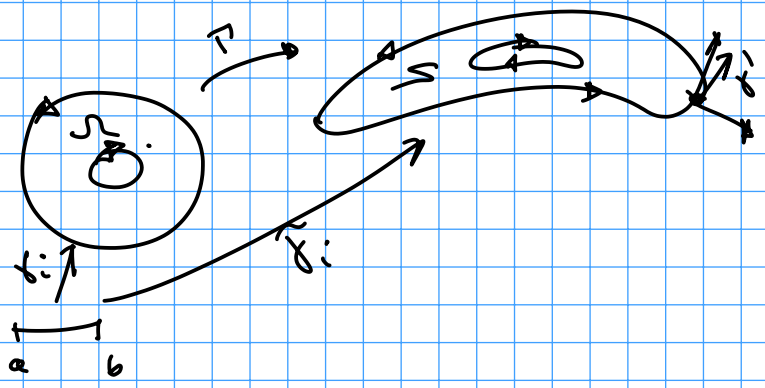
IL DET (ϕ) dice se le curve γ_i TRASFERITE su $\Omega_1 = \phi(\Omega)$ sono coerenti con $\partial\Omega_1$ ($\det > 0$) oppure no)

Dato S superficie parametrica: $\Gamma : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ $\Gamma(\overline{\Omega}) = S$

Se $\gamma_1 .. \gamma_m$ descrivono il bordo di Ω coerentemente con Ω

$\Rightarrow$ Ho m curve $\tilde{\gamma}_1 .. \tilde{\gamma}_m$ definite da $\tilde{\gamma}_i = \Gamma \circ \gamma_i$

che descrivono $\Sigma(S)$ (tutte curve chiuse)



- AUTOMATICAMENTE OGNI SUPERFICIE PARAMETRICA HA UN NUMERO FINITO DI CURVE CHE DESCRIVONO $\Sigma(S)$ "COERENTEMENTE CON S"

TEOREMA Se $S_1 = \phi(S)$ dove ϕ è un diffeomorfismo (S sup. parametrica su un Ω connesso).

Supponi $\gamma_1 .. \gamma_m$ descrivono $\Sigma(S)$ come della sopra.

(S_1 è una sup parametr. e) ci sono due possibilità

① $\frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}$ è concorde con $\frac{\partial \Gamma \circ \phi}{\partial u_1} \otimes \frac{\partial \Gamma \circ \phi}{\partial v_1}$

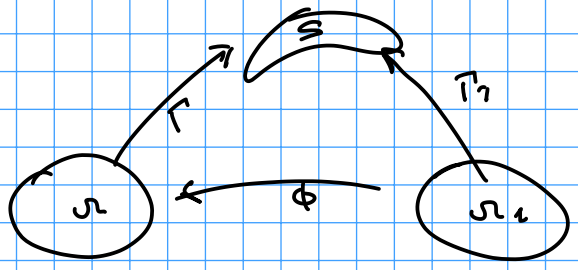
e allora le curve $\tilde{\gamma}_i : \phi \circ \gamma_i$

descrivono il bordo di S_1 coerentemente con S_1

② $\frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}$ è discorde con $\frac{\partial \Gamma \circ \phi}{\partial u_1} \otimes \frac{\partial \Gamma \circ \phi}{\partial v_1}$

e allora le $\tilde{\gamma}_i = \phi \circ \gamma_i$ sono opposte al verso di $\Sigma(\Omega_1)$ (cioè $\tilde{\gamma}_i$ percorse in verso opposto sono coerenti con $\Sigma(\Omega_1)$)

① vale se $\det \phi > 0$ ② vale se $\det \phi < 0$



$\Gamma_1 = \Gamma \circ \phi$

IL VERSO DELLA NORMALE È IL VERSO DI PERCORRENZA DEL BORDO VANNO INSIEME.

DUNQUE Se $(S, \hat{\nu})$ è una superficie ORIENTATA ho **AUTOMATICAMENTE UN VERSO** su $\Sigma(S)$ concorde con $\hat{\nu}$.

QUESTO VERSO DI $\Sigma(S)$ è quello indotto da una parametrizzazione Γ tale che $\frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}$ è concorde con $\vec{\nu}$

DEF Data una superficie PARAMETRICA ORIENTATA $(S, \hat{\nu})$ e dato un campo $\vec{f}$ definito su S

definisco il FLUSSO (integrale superficiale di II TIPO) di $\vec{f}$ su S ponendo

$$\iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma := \iint_{\Omega} \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \underbrace{\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v)}_{\vec{N}(u,v)} \, du \, dv$$

dove $\Gamma : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione di S tale che

$$\hat{\nu} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$$

(CI VUOLE CHE L'INTEGRANDO SIA INTEGRABILE - per es. $\vec{f}$ CONTINUO)

SI DIMOSTRA CHE L'INTEGRALE SCRITTO SOPRA NON CAMBIA SE SCELGO UN'ALTRA PARAMETRIZZAZIONE Γ_1 CHE MANTENGA LA DIREZIONE DI $\vec{N}$ IN EFFETTI SE

Γ_1 è un'altra parametrizzazione di S $\Rightarrow$ (visto)

$\Gamma_1 = \phi \Gamma$ con $\phi : \overline{\Omega}_1 \to \overline{\Omega}$ diffeomorfismo.

Allora

$$\iint_{\Omega_1} \vec{f}(\Gamma_1(u_1, v_1)) \cdot \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1} \otimes \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1} \, du_1 \, dv_1 =$$

$$\operatorname{segno}(\det J_\phi) \iint_{\Omega} \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \, du \, dv$$