Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 55 02/5/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Superficie parametrica: $S \subset \mathbb{R}^3$ per cui esistono $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ regolare (e limitato) e una "parametrizzazione" $T : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ di classe $C^1(\Omega)$ e continua in $\overline{\Omega}$ per cui $T(\overline{\Omega}) = S$.

Dato S superficie sono definiti

- Il bordo di S $= T(\partial\Omega)$ indicato con $\Sigma(S)$
- Se $P \in S \setminus \Sigma(S)$ è definito lo "spazio tangente" a S in P $(= T(u_0, v_0))$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}(u_0,v_0) \otimes \frac{\partial T}{\partial v}(u_0,v_0) \right)^{\perp} = T_P(S)$$

$\vec{N}$ è una normale a S in P

Posso anche considerare la "retta normale"

$$N_T(S) = \{ t\vec{N} : t \in \mathbb{R} \}$$

TUTTE QUESTE DEFINIZIONI NON DIPENDONO DA T

Def. Dato S come sopra e dato $f : S \to \mathbb{R}$, continua (basterebbe di meno...). Definisco l'integrale (di superficie)

di f su S. COME SEGUE

$$\iint_S f\,d\sigma \underset{\text{def}}{=} \iint_\Omega f(\Gamma(u,v)) \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v) \right\| du\,dv$$

dove Γ è una parametrizzazione per S: VEDREMO SUBITO CHE L'INTEGRALE NON CAMBIA SE CAMBIO Γ

IN PARTICOLARE CHIAMO <u>Area di S</u> l'integrale

$$A(S) := \iint_S 1 \cdot d\sigma = \iint_\Omega \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right\| du\,dv$$

<u>ESEMPIO</u> (Area della sfera)

Considero $\Gamma(\theta,\varphi) = \cos\theta \sin\varphi\, \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi\, \vec{j} + \cos\varphi\, \vec{k}$

$\Omega = \{(\theta,\varphi) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi\}$ $\quad S = \Gamma(\Omega) = \{x^2+y^2+z^2 = 1\}$

Abbiamo visto che questo Γ NON È UNA PARAMETRIZZAZIONE BUONA + però facciamo finta di niente - dal punto di vista dell'integrale non dovrebbe contare

$$\left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta}(\theta,\varphi) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi}(\theta,\varphi) \right\| = |\sin\varphi| = \sin\varphi$$

(VISTO L'ALTRA VOLTA). DUNQUE

$$A(S) = \iint_\Omega \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi$$

$$= 2\pi \left[-\cos(\varphi) \right]_0^{\pi} = 4\pi$$

POTREI CERCARE DI CALCOLARE L'AREA DI S USANDO UN'ALTRA PARAMETRIZZAZIONE. CONSIDERIAMO $S^+ = \{x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \ge 0\}$

S^+ è il grafico della funzione $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ per $x,y \in B = \{x^2+y^2 \le 1\}$ ALLORA

posso prendere $\Gamma(u,v) = u\,\vec{\imath} + v\,\vec{\jmath} + \sqrt{1-u^2-v^2}\,\vec{k}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial u} = \vec{\imath} + \frac{-2u}{2\sqrt{1-u^2-v^2}}\,\vec{k} \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \vec{\jmath} - \frac{2v}{2\sqrt{1-u^2-v^2}}\,\vec{k}$$

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\,\vec{\imath} + \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\,\vec{\jmath} + \vec{k}$$

$$\Rightarrow \|\vec{N}\| = \sqrt{\frac{u^2}{1-u^2-v^2} + \frac{v^2}{1-u^2-v^2} + 1} =$$

$$\sqrt{\frac{u^2+v^2+1-u^2-v^2}{1-u^2-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

Allora $A(S^+) = \iint_B \frac{du\,dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$ → coordinate polari

$u = \rho\cos\theta \quad v = \rho\sin\theta \qquad B \to \{0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

$$\to \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = 2\pi \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho \qquad \rho^2 = s \quad 2\rho\,d\rho = ds$$

$$= \pi \int_0^1 (1-s)^{-1/2}\,ds = \pi\left[-2(1-s)^{1/2}\right]_0^1 = \pi(0+2) = \boxed{2\pi}$$

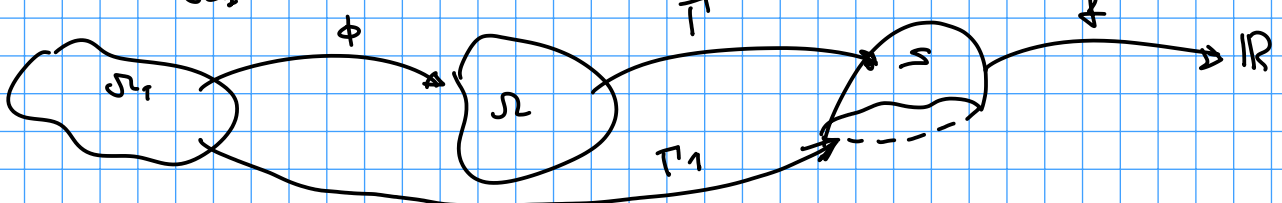
TORNA COL FATTO CHE $A(S) = A(S^+) + A(S^-) = 2\,2\pi = 4\pi$

C'È IN EFFETTI UN TEOREMA

TEOREMA Se $\phi : \Omega_1 \to \Omega$ è un diffeomorfismo, $\Gamma : \Omega \to S$ è una parametrizzazione per S, $\Gamma_1 : \Omega_1 \to S$ è definita da $\Gamma_1 := \Gamma \circ \phi$

ALLORA $$\iint_\Omega f(\Gamma(u,v)) \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right\| du\,dv =$$

$$\iint_{\Omega_1} f(\Gamma_1(u_1,v_1)) \left\| \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1} \otimes \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1} \right\| du_1\,dv_1$$



Dim. Dato che $\Gamma_1 = \Gamma \circ \phi$

$\Rightarrow J_{\Gamma_1} = J_\Gamma \circ J_\phi$. Usando il lemma dell'altro volta

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1} \otimes \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1} = (\det J\phi) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \circ \phi \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \circ \phi$$

Ne segue che

$$\iint_{\Omega_1} f(\Gamma_1(u_1,v_1)) \cdot \left\| \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1} \otimes \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1} \right\| du_1 dv_1 = \text{(per il calcolo sopra)}$$

$$\iint_{\Omega_1} f(\Gamma \circ \phi(u_1,v_1)) \, |J_\phi(u_1,v_1)| \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(\phi(u_1,v_1)) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(\phi(u_1,v_1)) \right\| du_1 dv_1$$

$$= \text{(cambio di variabile } (u,v) = \phi(u_1,v_1))$$

$$\iint_{\Omega} f(\Gamma(u,v)) \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial dv} \right\| du\, dv \qquad \text{FINE} \qquad \#$$

DUNQUE L'INTEGRALE DI SUPERFICIE NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE

ESEMPIO $S = \{(x,y,z) : |x| \le 1, |y| \le 1 \quad z = x^2 - y^2\}$

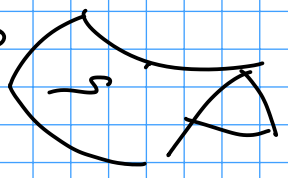
S è il grafico della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$

e abbiamo visto che, prendendo $\Gamma(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + f(u,v)\vec{k}$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right\| = \sqrt{1 + |\nabla f|(u,v)^2} \quad . \text{ DUNQUE}$$

$$\nabla(x^2 - y^2) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

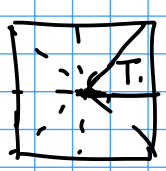
$$A(S) = \iint_Q \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy = \textcircled{*}$$



$$Q = \{|x| \le 1, |y| \le 1\} = \{-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$$

$$\textcircled{*} = 8 \iint_T \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy \quad \text{dove } T = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$$

↑ SIMMETRIA



$$= \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dy =$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx \int_0^x \sqrt{1+\frac{4}{1+4x^2}y^2}\, dy = \qquad s = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}y$$

$$\int_0^1 \frac{1+4x^2}{2} \int_0^{\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}} \sqrt{1+s^2}\, ds \qquad y = \frac{1}{2}\sqrt{1+4x^2}\, s$$

$$dy = \frac{1}{2}\sqrt{1+4x^2}\, ds$$

$$\int \sqrt{1+s^2}\, ds \qquad s = \sinh t \qquad ds = \cosh t\, dt$$

$$\int \cosh^2 t\, dt \qquad \cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

$$= \int \frac{\cosh 2t + 1}{2} = \frac{\sinh 2t}{4} + \frac{t}{2} + \cos t$$

$$= \frac{\sinh t \cosh t}{2} + \frac{t}{2} + \cos t = \frac{\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t} + t}{2} + \cos t$$

$$= \frac{s\sqrt{1+s^2}}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(s) \implies \text{TORNANDO SOPRA}$$

$$\int_0^1 \frac{1+4x^2}{2}\left[\frac{s\sqrt{1+s^2}}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(s)\right]_0^{\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}} = \ldots$$

(VEDIAMO LUNEDÌ...)