Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 54 30/4/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

ULTIMO COMPITINO: VENERDÌ 1/6 ore 15.00
Aula B.22

SUPERFICI E INTEGRALI DI SUPERFICIE

Ci sono vari livelli di generalità.

COMINCIAMO DALLE "SUPERFICI PARAMETRICHE"

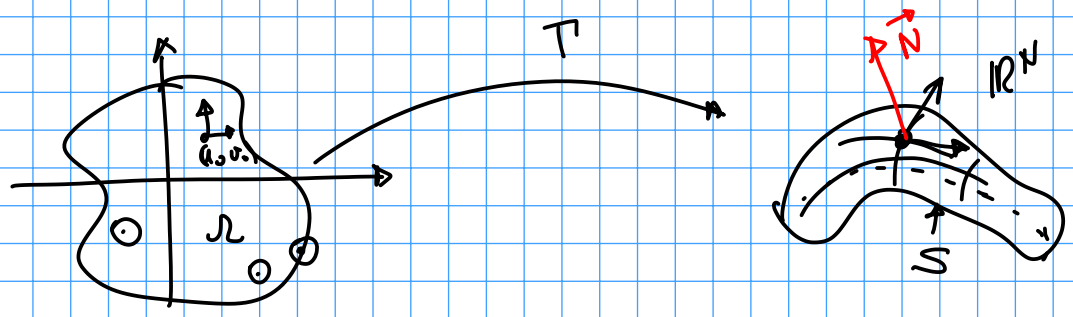
Def. Chiamo "superficie parametrica" una funzione $\Gamma : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^2$ tale che

① Ω è regolare a tratti

② Γ è continua in $\bar{\Omega}$ ed è di classe C^1 su Ω

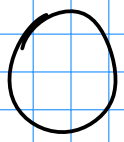
③ Γ è iniettiva

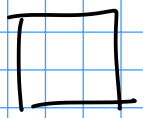
④ Per ogni punto $(u_0, v_0) \in \Omega$ i vettori $\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial}{\partial v}\Gamma(u_0, v)$ sono linearmente indipendenti



Ricordo che Ω regolare $\leftrightarrow$ $\Omega = \{G(u,v) < 0\}$ con G di classe C^1 e $\nabla G(u,v) \neq 0$ se $G(u,v) = 0$ (DA CUI $\bar{\Omega} = \{G(u,v) \leq 0\}$ e $\partial\Omega = \{G(u,v) = 0\}$ - regolare e buchi $\Rightarrow$ intersezione finita di regolari

INTERSEZIONE "BUONA"


REGOLARE


REG. A TRATTI

LA ④ Permette di definire il piano tangente alla superficie nel punto $\Gamma(u_0,v_0)$ come il piano generato da $\frac{\partial\Gamma}{\partial u}(u_0,v_0)$ e $\frac{\partial\Gamma}{\partial v}(u_0,v_0)$.

Se $\boxed{N=3}$ la condizione ④ si può esprimere dicendo che

$$\boxed{\vec{N}(u_0,v_0) = \frac{\partial\Gamma}{\partial u}(u_0,v_0) \otimes \frac{\partial\Gamma}{\partial v}(u_0,v_0)} \neq 0 \quad \forall\, (u_0,v_0) \in \Omega$$

il vettore $\vec{N}(u_0,v_0)$ individua una "direzione normale" alla superficie nel punto $\Gamma(u_0,v_0)$

CHIAMO **SOSTEGNO** di Γ l'insieme

$$S = \{\Gamma(u,v) : (u,v) \in \bar{\Omega}\}$$

CHIAMO **BORDO DELLA SUPERFICIE** L'INSIEME

$$\sum(\Gamma) = \{\Gamma(u,v) : (u,v) \in \partial\Omega\}$$

NOTA IL BORDO di "S" è $\neq$ da ∂S ($\neq$)

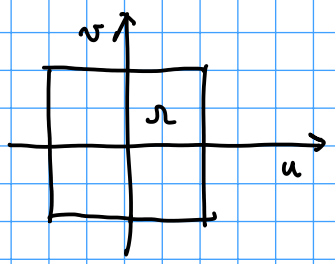
Tutte queste nozioni dipendono da Γ (e non solo da S).

N=3 Conviene anche introdurre il "versore normale"

$$\hat{N}(u,v) = \frac{\vec{N}(u,v)}{\|N(u,v)\|} = \left(\text{è destinato a dipendere dalla parametrizzazione - MENTRE IL PIANO TANGENTE NO} \right)$$

ESEMPIO

$\Omega =]-1,1[\times]-1,1[$ $\quad (\overline{\Omega} = [-1,-1] \times [-1,1])$ **N=3**



$$\Gamma(u,v) = (u, v, u^2 - v^2) = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 - v^2)\vec{k}$$

- Ω è regolare e basti dire che $\Omega = \{x<1\} \cap \{x>-1\} \cap \{y<1\} \cap \{y>-1\}$ VALE ①

- $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial u} = \vec{i} + 2u\vec{k}$ $\qquad \dfrac{\partial \Gamma}{\partial v} = \vec{j} - 2v\vec{k}$

$$\vec{N}(u,v) = (\vec{i} + 2u\vec{k}) \otimes (\vec{j} - 2v\vec{k}) = \vec{i}\otimes\vec{j} + 2u\,\vec{k}\otimes\vec{j} - 2v\,\vec{i}\otimes\vec{k}$$

$$= \vec{k} - 2u\vec{i} + 2v\vec{j}$$

$$\|\vec{N}(u,v)\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1} \neq 0 \quad \forall u,v \qquad (\text{VALE ④})$$

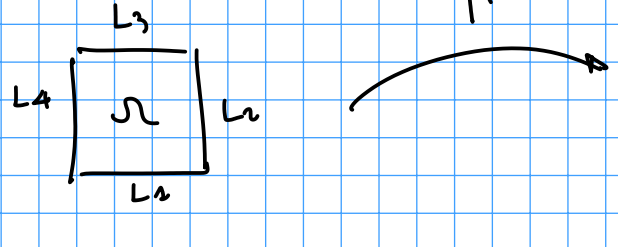
- L'INIETTIVITÀ di Γ segue dal fatto che se $(u_0,v_0) \neq (u_1,v_1)$

$\Rightarrow \Gamma(u_0,v_0) \neq \Gamma(u_1,v_1)$ (le prime due componenti sono $\neq$)

$$u_0\vec{i} + v_0\vec{j} + (\ )\vec{k} \qquad u_1\vec{i} + v_1\vec{j} + (\ )\vec{k}$$

- LA ② è ovvia.

DUNQUE HO UNA SUPERFICIE



IL BORDO DI Γ ("di S") è $\Gamma(\partial\Omega) = \Gamma(L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4)$

QUESTO ESEMPIO È "UN GRAFICO"

Def. Se Ω è un aperto regolare e limitato in $\mathbb{R}^2$ e f

$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, f continua su $\overline{\Omega}$ e C^1 su Ω, allora

$\Gamma(u,v) := u\vec{i} + v\vec{j} + f(u,v)\vec{k}$

È UNA SUPERFICIE PARAMETRICA, che si chiama **grafico di f**. È FACILE VEDERE CHE VALGONO ① ② ③

e che $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial u} = \vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial u} f \cdot \vec{k}$ $\quad \dfrac{\partial \Gamma}{\partial v} = \vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial v} f \vec{k} \Rightarrow$

$$\vec{N}(u,v) := \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \vec{k} - \frac{\partial f}{\partial u}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial v}\vec{j} \quad \text{da cui}$$

$$\|\vec{N}(u,v)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1} = \sqrt{|\nabla f|^2 + 1} \neq 0$$

UN GRAFICO È UNA PARTICOLARE SUP. PARAMETRICA

ESEMPIO Considero Γ definito da:

$$\Gamma(\theta, \varphi) = \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} + \cos(\varphi)\vec{k}$$

(è chiaro che $\|\Gamma(\theta,\varphi)\| = 1 \quad \forall\, \theta, \varphi$)

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} = -\sin\theta \sin\varphi\, \vec{i} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{j}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi} = \cos\theta \cos\varphi\, \vec{i} + \sin\theta(\cos\theta)\vec{j} - \sin(\varphi)\vec{k}$$

$$\vec{N} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi} \sim \det \begin{bmatrix} \vec{i} & -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \vec{j} & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \vec{k} & 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix} =$$

$$-\cos\theta\sin^2\varphi\,\vec{i} - \sin\theta\sin^2\varphi\,\vec{j} + (-\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi)\vec{k} =$$

$$-\left(\cos\theta\sin^2\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin^2\varphi\,\vec{j} + \sin\varphi\cos\varphi\,\vec{k}\right) = \vec{N}(\theta,\varphi)$$

Ne calcolo il modulo:

$$\|\vec{N}\|^2 = \underbrace{\cos^2\theta\sin^4\varphi + \sin^2\theta\sin^4\varphi} + \sin^2\varphi\cos^2\varphi =$$

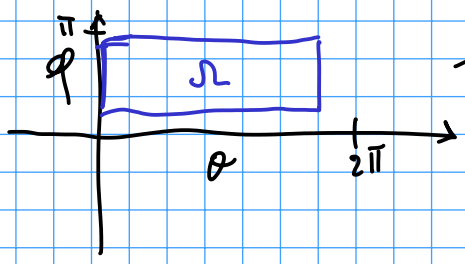
$$\sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi = \sin^2\varphi\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right) = \sin^2\varphi$$

$$\|\vec{N}(\theta,\varphi)\| = |\sin\varphi|$$

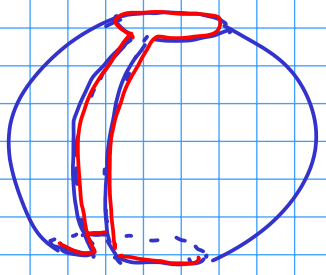
Se voglio che Γ sia iniettiva e $\|\vec{N}\| \neq 0$ posso per esempio

prendere $\Omega = \{\theta_0 < \theta < \theta_1\,,\ \varphi_0 < \varphi < \varphi_1\}$ con

$$0 \le \theta_0 < \theta_1 < 2\pi \qquad 0 < \varphi_0 < \varphi_1 < \pi$$



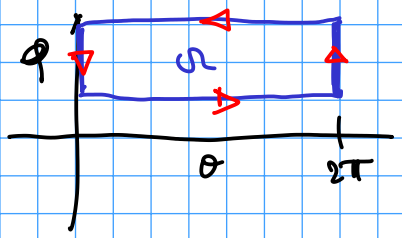
Γ



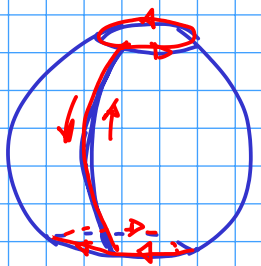
← È UNA SUP. PARAMETRICA

E IL SEGNO ROSSO INDICA IL BORDO $\Sigma(\Gamma)$

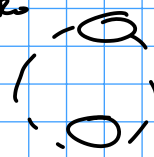
SE CONSIDERASSI $0 \le \theta \le 2\pi$ PERDEREI L'INIETTIVITÀ



Γ



IL BORDO VERO DOVREBBE ESSERE



OLTRE A CIÒ SE GUARDO $\Sigma(\Gamma) = \Gamma(\partial\Omega)$ TROVO ANCHE IL MERIDIANO E NON È ASSOLUTAMENTE NATURALE CHE IL MERIDIANO FACCIA PARTE DEL BORDO DI S

SE AGGIUNGO UN "VERSO DI PERCORRENZA" MI ACCORGO CHE IL MERIDIANO È PERCORSO DUE VOLTE - UNA IN VERSO OPPOSTO ALL'ALTRA.

IN QUALCHE SENSO IL MERIDIANO SI CANCELLA

VEDIAMO COME MOLTE DELLE NOZIONI INTRODOTTE NON DIPENDONO DALLA PARAMETRIZZAZIONE

LEMMA Se A è una matrice 3×2 e chiamo $\vec{v}(A) = A_1 \otimes A_2$ $\left(A = [A_1, A_2] \quad A_i = \text{le colonne} \right)$

se B è 2×2 $\rightarrow$ $A\cdot B$ è ancora 3×2 e vale

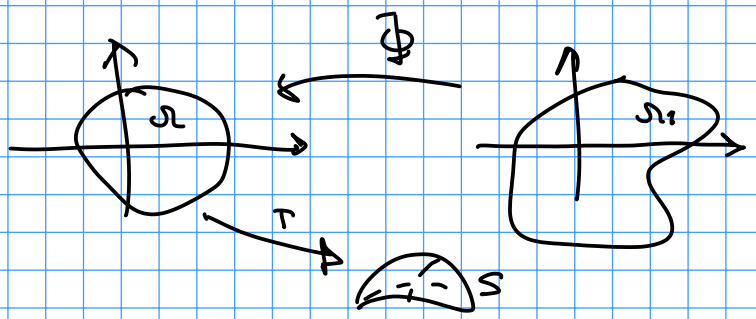
$$\vec{v}(A\cdot B) = \det(B)\cdot \vec{v}(A) \qquad \left(A_1 \text{ e } A_2 \text{ sono vettori } 3\times 1 \right)$$

INFATTI poniamo $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A\cdot B = [A_1, A_2]\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = [a A_1 + c A_2,\ b A_1 + d A_2]$$

$$\vec{v}(A\cdot B) = (a A_1 + c A_2)\otimes(b A_1 + d A_2) =$$
$$ad\,(A_1\otimes A_1) + cb\,(A_2\otimes A_1) =$$
$$(ad - bc)\, A_1\otimes A_2 = \det(B)\cdot \vec{v}(A)$$

PROP. SUPPONIAMO $\Gamma : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ sia una sup. parametrica e che $\Phi : \overline{\Omega}_1 \to \overline{\Omega}$ sia "UN DIFFEOMORFISMO" TRA Ω e Ω_1.



CIOÈ Φ è bigettiva, Φ e Φ^{-1} sono continue su $\overline{\Omega}/\overline{\Omega}_1$, Φ e Φ^{-1} sono C^1 su Ω/Ω_1, $\Rightarrow \det J_\Phi \neq 0$

Poniamo $\Gamma_1 := \Gamma\circ\Phi$ $\left(\text{da } \overline{\Omega}_1 \to \mathbb{R}^3\right)$

Γ_1 è (idealmente) un'altra superficie con lo stesso sostegno S: $\Gamma(\overline{\Omega}) = \Gamma_1(\overline{\Omega}_1)$

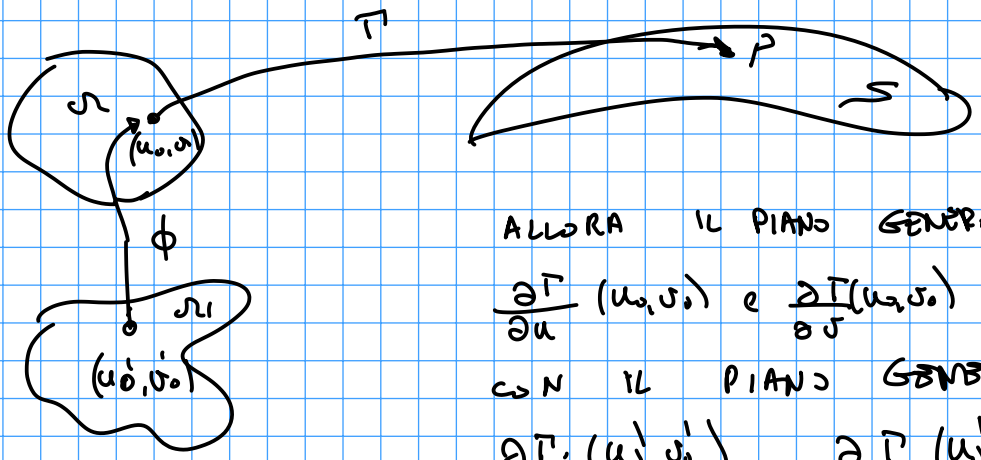
SI HA:

- Γ_1 è una superficie tale che

① $\forall\ p \in S$ il piano tangente a S individuato da Γ coincide con il piano tangente individuato da Γ_1

PIÙ PRECISAMENTE

$$p \in S \leftrightarrow p = \Gamma(u_0, v_0) \text{ con } (u_0, v_0) \in \Omega$$
$$= \Gamma_1(u_0', v_0')$$



ALLORA IL PIANO GENERATO DA

$\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u_0, v_0)$ COINCIDE

CON IL PIANO GENERATO DA

$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u'}(u_0', v_0')$ $\frac{\partial \Gamma_1}{\partial v'}(u_0', v_0')$

② IL BORDO $\Sigma(\Gamma)$ coincide con $\Sigma(\Gamma_1)$

DIM di ①

Calcoliamo $\vec{N}_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u'} \otimes \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v'} = ??$ $\left(=? \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \ ? \right)$

ABBIAMO

$$\left[\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u'}, \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v'}\right] = J_{\Gamma_1} = J_{\Gamma \circ \phi} = \underset{3\times 2}{J_\Gamma} \circ \underset{2\times 2}{J_\phi}$$

APPLICANDO IL LEMMA PRIMA

$$\vec{N}_1 = \vec{\nu}(J_{\Gamma_1}) = \det(J_\phi) \cdot \vec{\nu}(J_\Gamma) = \det(J_\phi) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right)$$

DUNQUE

$$\textcircled{*} \quad \underbrace{\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u'} \otimes \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v'}}_{\Rightarrow \vec{N}_1} = (\det J_\phi) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right)}_{\vec{N}} \circ \phi$$

$$\left\| \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u'} \otimes \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v'} \right\| = \left\| \det J_\phi \right\| \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right\| \neq 0$$

$\neq 0$

DIVERSO DA ZERO $\Rightarrow$ Γ_1 È UNA SUPERFICIE

ITO ANCHE CHE $\vec{N}_1 = \lambda \vec{N}$ (con $\lambda \neq 0$, che dipende da P)

$\Rightarrow$ i piani tangenti (che sono gli ortogonali a $\vec{N}_1$ / $\vec{N}$) COINCIDONO

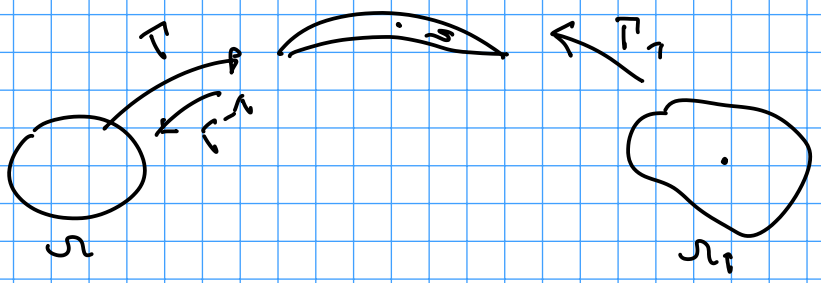
NON DIMO STO ②

TEOREMA (SENZA DIM.)

SUPPONIAMO CHE $\Gamma : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, $\Gamma_1 : \bar{\Omega}_1 \to \mathbb{R}$ sono due superfici parametriche aventi lo stesso sostegno $S = \Gamma(\bar{\Omega}) = \Gamma_1(\bar{\Omega}_1)$

POSSIAMO DEFINIRE

$\phi : \bar{\Omega}_1 \to \bar{\Omega}$ $\quad \phi = \Gamma^{-1} \circ \Gamma_1$ ALLORA



ϕ È UN DIFFEOMORFISMO TRA Ω_1 e Ω

ALLORA POSSIAMO PARLARE DI SUPERFICIE PARAMETRICA PARTENDO DAL SOSTEGNO.

Def (NUOVA) Dico che $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie parametrica se $\exists\, \Gamma : \Omega \to \mathbb{R}$ che verifica (1) (2) (3) (4) e tale che $\Gamma(\bar{\Omega}) = S$

Per i teoremi detti $\Rightarrow$ SONO BEN DEFINITI.

- $\forall p \in S$ il piano tangente $T_p(S)$ e la retta normale $N_p(S)$
  (NON È DEFINITO UNIVOCAMENTE IL VERSORE NORMALE)

- $\Sigma(S)$ è ben definito con $T(\partial\Omega)$ (non dipende da T)