Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 53 24/4/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

ESEMPIO Considero il campo $\vec{f}(x,y) = \frac{y^2}{x^2}\vec{i} - \frac{2y}{x}\vec{j}$

definito su $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ (= unione di due semipiani $\{x>0\} \cup \{x<0\}$)

Calcolare $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$ dove γ è il segmento tra $(1,1)$ e $(4,2)$

Parametrizzo il segmento: $\gamma(t) = (1,1) + t\left[(4,2) - (1,1)\right] = (1,1) + t(3,1)$

per $t \in [0,1]$. In questo modo $\gamma(0) = (1,1)$ $\gamma(1) = (4,2)$

$\gamma'(t) = (3,1) = 3\vec{i} + \vec{j}$. Applico la definizione:

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{f}(1+3t, 1+t) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{(1+t)^2}{(1+3t)^2}\vec{i} - \frac{2(1+t)}{(1+3t)}\vec{j} \right)\left(3\vec{i} + \vec{j}\right) dt =$$

$$\int_0^1 \left(3\frac{(1+t)^2}{(1+3t)^2} - \frac{2(1+t)}{(1+3t)} \right) dt = \text{(illegible)}$$

devo fare la divisione di $1+t$ diviso $1+3t$

$$\frac{1+t}{1+3t} = \frac{1/3 + 2/3 + t}{1+3t} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{1+3t} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1+t}{1+3t}\right)^2 = \frac{1}{9} + 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\frac{1}{1+3t} + \frac{4}{9}\frac{1}{(1+3t)^2}$$

$$(*) = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\frac{1}{1+3t} + \frac{4}{3}\frac{1}{(1+3t)^2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\frac{1}{1+3t}\right) dt =$$

$$\int_0^1 \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\frac{1}{(1+3t)^2}\right) dt = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\left[-\frac{1}{(1+3t)}\frac{1}{3}\right]_0^1 =$$

$$-\frac{1}{3} - \frac{4}{9}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = -\frac{1}{3} + \frac{3}{9} = 0$$

DOMANDA $\vec{f}$ è CONSERVATIVO ?

Proviamo a vedere se è irrotazionale (se non lo è $\Rightarrow$ non può essere conservativo).

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{2y}{x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2y}{x}\right) = \frac{2y}{x^2} \quad \text{TORNA}$$

$\Rightarrow \vec{f}$ è irrotazionale. VEDIAMO SE RIESCO A TROVARE UN POTENZIALE $F(x,y)$

(a) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y^2}{x^2}$ (b) $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2y}{x}$

(b) $\Rightarrow$ $F(x,y) = -\frac{y^2}{x} + c(x)$ (integro la (b) in y)

Derivo la formula trovata rispetto a x $\Rightarrow$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y^2}{x^2} + c'(x)$. IMPONGO LA (a) $\Rightarrow c' = 0$

dunque $c =$ costante e posso prendere $F(x,y) = \frac{y^2}{x} + \text{cost.}$

(NOTA CHE Ω non è connesso, dunque posso prendere $c(x) = c_1$ se $x>0$, $c(x) = c_2$ se $x<0$)

HO TROVATO UN POTENZIALE $\Rightarrow$ $\vec{f}$ è conservativo.

POSSO RIFARE L'INTEGRALE USANDO F, dato da φ:

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = F(4,2) - F(1,1) = \left[\begin{matrix} y^2 \\ x \end{matrix}\right]_{(1,1)}^{(4,2)} = \frac{4}{4} - 1 = 0$$

TORNA

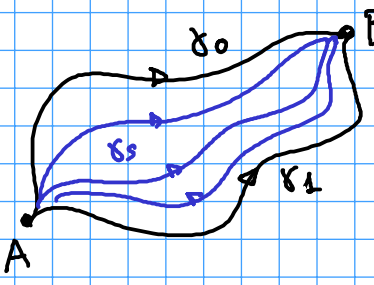
VISTO IERI

CONSERVATIVO $\Rightarrow$ IRROTAZIONALE MA NON IL VICEVERSA (NON SEMPRE)

Che condizioni mi servono per $\Leftarrow$? . Dipende da Ω

SIA Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ FISSATO

Def. Prendiamo due curve $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$, che abbiano gli stessi estremi $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = A$ $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = B$



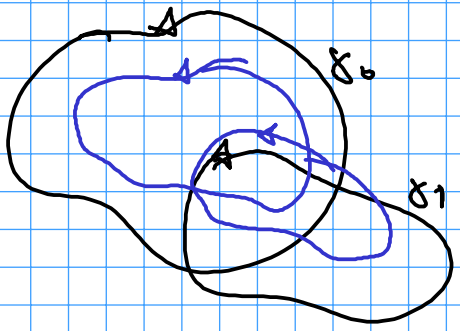
DIREMO che γ_1 e γ_2 sono OMOTOPE in Ω (come curve con gli stessi estremi) se esiste $H : [a,b]\times[0,1] \to \Omega$ H continua (nelle due variabili), t.c.

- $H(t,0) = \gamma_0(t)$; $H(t,1) = \gamma_1(t)$ $\forall t \in [a,b]$
- $H(a,s) = A$; $H(b,s) = B$ $\forall s \in [0,1]$

IDEA: se $s \in [0,1]$ ho una curva $\gamma_s(t) = H(t,s)$; se $s=0$ ho γ_0 se $s=1$ ho γ_1 (quelle iniziali), se $s \in]0,1[$ ho una famiglia di curve che si muove con continuità da γ_0 a γ_1

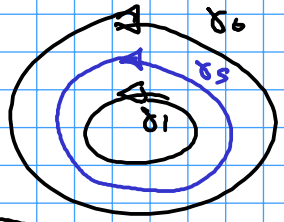
Def. Se γ_0 e γ_1 sono due curve chiuse in Ω dico che sono omotope come chiuse in Ω se $\exists\, H : [a,b]\times[0,1]$ continua

tale che
- $H(t,0) = \gamma_0(t)$; $H(t,1) = \gamma_1(t)$ $\forall t \in [a,b]$
- $H(a,s) = H(b,s)$ $\forall s \in [0,1]$



Posso pensare un cammino da γ_0 a γ_1 come una famiglia di curve chiuse

$\gamma_s(t) = H(t,s)$

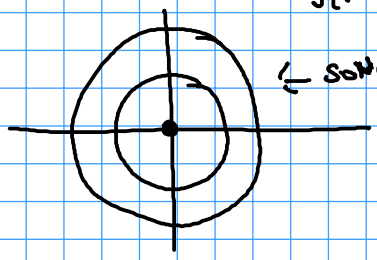


$\gamma : [a,b] \to \Omega$

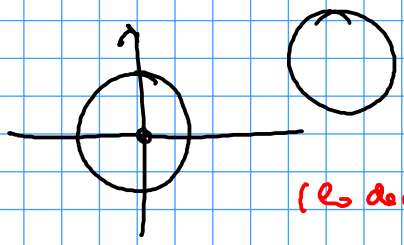
TEOREMA Se γ_1 e γ_2 sono omotope (in uno qualunque dei due sensi) in Ω di classe C^1 e $\vec{f}$ irrotazionale $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



← SONO OMOTOPE IN Ω



NON SONO OMOTOPE IN Ω

(Lo deduco dal fatto che il campo dell'olio vale lo integrale 2π nello primo e integrale 0 nello secondo)

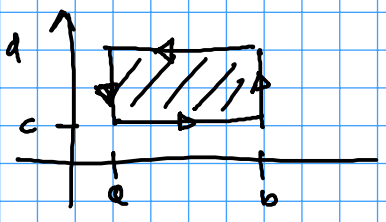
IDEA DI DIM. IN $\mathbb{R}^2$ Prendo $\vec{f} = f_1(x,y)\vec{i} + f_2(x,y)\vec{j}$

Ho che $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ (condizione di irrotazionalità)

Prendiamo un rettangolo $\underbrace{[a,b] \times [c,d]}_{R}$ su cui $\vec{f}$ sia definita

DICO CHE $\int \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$

se γ "descrive" il bordo di R



IN EFFETTI

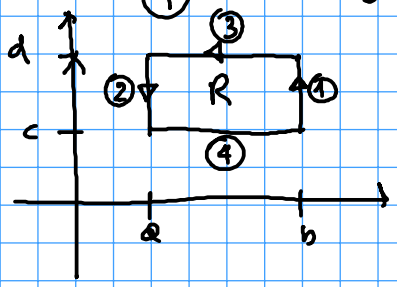
$$0 = \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\,dx \right) dy +$$

$$- \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \Big[f_2(x,y) \Big]_{x=a}^{x=b} dy +$$

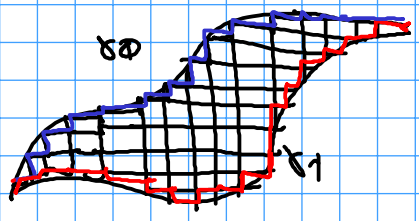
$$- \int_a^b \Big[f_1(x,y) \Big]_{y=c}^{y=d} dx = \int_c^d f_2(b,y)\,dy + \int_c^d \left(-f_2(a,y)\right) dy + \int_a^b \left(-f_1(x,d)\right) dx +$$

$$\int_a^b f_1(x,c)\,dx$$

① ② ③ ④



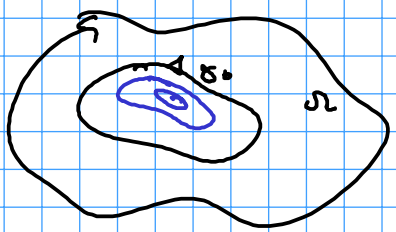
SE ADESSO HO DUE CURVE OMOTOPE POSSO FARE QUESTA COSTRUZIONE



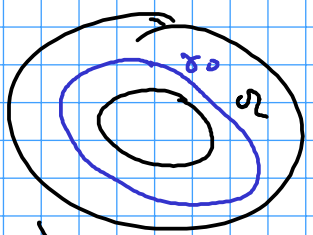
INTEGRALE SULLA CURVA BLU = INTEGRALE SULLA CURVA ROSSA (PER IL RISULTATO SOPRA)

se i lati $\to 0$ $\Rightarrow$ curva blu $\to \gamma_0$ curva rossa $\to \gamma_1$

DEF. DICO CHE Ω È SEMPLICEMENTE CONNESSO se ogni curva chiusa γ_0 è omotopa a una (curva) costante



SEMP. CONNESSO



γ_0 NON SI PUÒ DEFORMARE A UN PUNTO

(Ω semplicemente connesso "NON HA BUCHI")

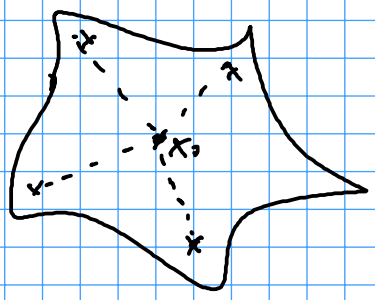
TEOREMA Se $\vec{f}$ è irrotazionale su Ω semplicemente connesso $\Rightarrow$ $\vec{f}$ è conservativo

Dim Data γ_0 curva chiusa $\Rightarrow$ esiste $P_0 \in \Omega$ tale che γ_0 è omotopa alla

curva $\gamma_1(t) = P_0 \quad \forall t. \Rightarrow \int_{\gamma_0} \vec{f}\, d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^b \vec{f}(P_0) \cdot \underbrace{\gamma_1'(t)}_{=0}\, dt = 0$

COME DIMOSTRO CHE UN INSIEME È SEMPLICEMENTE CONNESSO ?

Def. Dico che Ω è STELLATO RISPETTO A UN SUO PUNTO x_0 se $\forall x \in \Omega$ il segmento da x_0 e x è contenuto in Ω



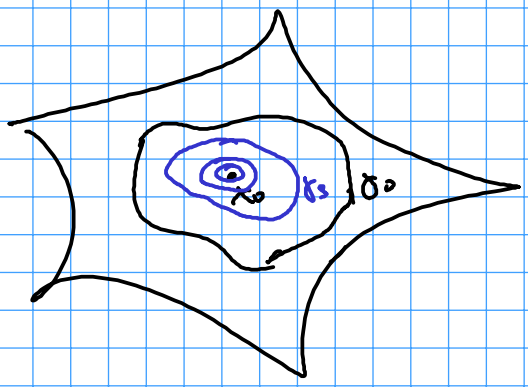
(una comp. dove x_0 illumina tutto Ω)

PER ESEMPIO SE Ω È CONVESSO $\Rightarrow$ Ω È STELLATO RISPETTO A OGNI SUO PUNTO.

PROP Ω STELLATO (rispetto a $x_0 \in \Omega$) $\Rightarrow$ Ω semplicemente connesso

DIM. Dimostro che ogni curva chiusa $\gamma_0 : [0,b] \to \Omega$ si deforma alla curva costante $\gamma_1(t) = x_0$. Basta prendere

$$H(t,s) := \gamma_0(t) + s(x_0 - \gamma_0(t))$$



QUINDI SE Ω è stellato rispetto a $x_0 \in \Omega$ e se $\vec{f}$ è irrotazionale $\Rightarrow$ $\vec{f}$ è conservativo

QUESTO IN REALTÀ SI PUÒ DIMOSTRARE DIRETTAMENTE SENZA USARE IL TEOREMA GENERALE. Vediamo come si fa.

Dim. Costruisco un potenziale per $\vec{f}$ usando i segmenti:

PER SEMPLICITÀ SUPPONGO $0 \in \Omega$ e Ω STELLATO RISPETTO A 0

Dato $x \in \Omega$ considero $s_x(t) = tx$, $t \in [0,1]$ il segmento tra 0 e x

e definisco ($s_x' = x$)

$$F(x) = \int_{s_x} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{f}(tx) \cdot x \, dt$$

Dico che F è un potenziale per $\vec{f}$. Dato $i = 1 \dots N$ voglio calcolare $\frac{\partial F}{\partial x_i}$. AMMETTIAMO (lo giustifico dopo) che si possa derivare sotto il segno di integrale.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\vec{f}(tx) \cdot x\right) dt = \int_0^1 \left(t \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(tx) \cdot x + \vec{f}(tx) \cdot \vec{e}_i\right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(t \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(tx) \cdot x_j + f_i(tx)\right) dt = (\vec{f} \text{ irrotazionale})$$

$$= \int_0^1 \left(t \sum \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(tx) \cdot x_j + f_i(tx)\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \left(t \nabla f_i(tx) \cdot x + f_i(tx)\right) dt =$$

$$\int_0^1 \left(t \frac{d}{dt} f(tx) + f_i(tx)\right) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t f_i(tx)\right) dt =$$

$$\left[t f_i(tx)\right]_0^1 = f_i(x) \quad \Leftarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i \Leftrightarrow \nabla F = \vec{f}$$

Per vedere che lo derivazione sotto il segno di int. è lecita posso considerare $h(t,x) = \vec{f}(tx) \cdot x \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} h(tx) = t \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} f(tx) \cdot x + f_i(tx)$$

dato che $\vec{f}$ è $C^1 \Rightarrow$ $|h(t,x)| \le C \quad \forall x \; \forall t$

$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} h(t,x)\right| \in C$ ∎ INTEGRABILI (in t) SU $[0,1]$

APPLICO I TEOREMI TIPO LEBESGUE

CORREZIONE DELL'ESERCIZIO II° (b)

$$x^2 y'' + (3x-2) y' - 35y = 6x^2$$

cerco $y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$

$$y'(x) = \sum_0^\infty a_n n x^{n-1} = \sum_1^\infty a_n n x^{n-1} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1) x^n$$

$$\left(\Rightarrow x y' = \sum_0^\infty a_n n x^n \right)$$

$$y'' = \sum_0^\infty a_n n(n-1) x^{n-2} \Rightarrow x^2 y'' = \sum_0^\infty a_n n(n-1) x^n$$

$$x^2 y'' + 3x y' - 2y' - 35y =$$

$$\sum_0^\infty \left(a_n n(n-1) + 3 a_n n - 2 a_{n+1}(n+1) - 35 a_n \right) x^n = 6x^2$$

$$\sum_0^\infty \left[a_n \left(n^2 - n + 3n - 35 \right) - 2(n+1) a_{n+1} \right] x^n$$

$$\sum_0^\infty \left[a_n \left(n^2 + 2n - 35 \right) - 2(n+1) a_{n+1} \right] x^n$$

((RADICI $\rightarrow$ $\frac{-1 \pm \sqrt{1+35}}{1} = -1 \pm 6 = \begin{cases} -7 \\ 5 \end{cases}$

$$\sum \left(a_n (n+7)(n-5) - 2(n+1) a_{n+1} \right) x^n$$

$$\Rightarrow \quad a_n (n+7)(n-5) - 2(n+1) a_{n+1} = b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 2 \\ 6 & \text{se } n = 2 \end{cases} \Big\} b_n$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n (n+7)(n-5) - b_n}{2(n+1)}$$

(R) $$a_{n+1} = \frac{a_n (n+7)(n-5)}{2(n+1)} + \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 2 \\ -1 & \text{se } n = 2 \end{cases}$$

qualunque eventuale soluzione deve verificare (R)

Dato che se $n=5$ TRovo $a_6 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq 6$

TUTTI POLINOMI DI GRADO 5

CONDIZIONE 1 $\quad y(0) = 0 \iff a_0 = 0$

$n=0 \rightarrow a_1 = a_0 \frac{8(-4)}{2} = 0$ $\quad \boxed{a_1 = 0}$

$n=1 \rightarrow a_2 = \ldots = 0$ $\quad \boxed{a_2 = 0}$

$n=2 \rightarrow a_3 = a_2 \frac{9 \cdot (-3)}{2 \cdot 3} - 1 \Rightarrow \boxed{a_3 = -1}$

$n=3 \rightarrow a_4 = a_3 \frac{10(-2)}{2 \cdot 4} = +\frac{5}{2}$ $\quad \boxed{a_4 = +\frac{5}{2}}$

$n=4 \rightarrow a_5 = a_4 \frac{11(-1)}{2 \cdot 5} = +\frac{5}{2}\left(\frac{-11}{25}\right) = \boxed{\frac{-11}{4} = a_5}$

$n=5 \ldots$ TUTTI ZERO

$$y(x) = -x^3 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{11}{4}x^5$$

CONDIZIONE 2 $\quad y'(0) = \frac{1}{36}$

$n=0 \quad a_1 = \frac{7(-5)}{2} \cdot a_0 \iff a_0 = \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{-35} = -\frac{1}{35 \cdot 18} = \boxed{\frac{-1}{630}}$

$n=1 \quad a_2 = \frac{8(-4)}{2 \cdot 2} a_1 = -8 \frac{1}{36} = \boxed{-\frac{2}{9}}$

$n=2 \quad a_3 = \frac{9(-3)}{2 \cdot 3} a_2 - 1 = -\frac{9}{2} \cdot \frac{-2}{9} - 1 = 0$

$$y(x) = -\frac{1}{630} + \frac{x}{36} - \frac{9}{2}x^2$$

FINE