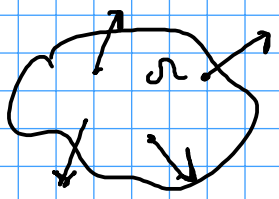
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 52 23/4/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

CAMPI VETTORIALI

Campo è una funzione da $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a valori in $\mathbb{R}^N$



(in ogni punto $x \in \Omega$ è definito un "vettore" $\vec{f}(x) \in \mathbb{R}^N$)

$\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$

È chiaro cosa vuol dire che $\vec{f}$ è continuo / differenziabile / C^1 / C^k ...

Def. Diciamo che $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è CONSERVATIVO se esiste $F : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\vec{f} = \nabla F$. In tal caso F viene detta POTENZIALE o PRIMITIVA per $\vec{f}$.

Oss. Se $N = 1$ tutte le funzioni continue ammettono primitive (per il Teorema fond. del calcolo integrale: se f è cont. $\exists F : F' = f$)

IN $N > 1$ non tutti i campi sono conservativi:

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-x \end{pmatrix} \quad \text{da } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Vediamo se esiste un potenziale F per $\vec{f}$:

(a) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = x+y$ (b) $\frac{\partial F}{\partial y} = y-x$

(a) $\Rightarrow$ $\int (x+y)\,dx = F(x,y) \iff \frac{x^2}{2} + xy + c(y) = F(x,y)$ (funzione che dipende solo da y)

Deriviamo rispetto a y $\Rightarrow$ $x + c'(y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \overset{(b)}{=} y - x$

$\iff$ $2x + c'(y) - y = 0$ se fisso y e muovo x la quantità a sinistra non rimane costantemente 0

$2x = y - c'(y)$

QUESTO CAMPO NON È CONSERVATIVO.

Ricordiamo l'integrale curvilineo di II° specie:

Dato $\gamma: [0,5] \to \mathbb{R}^N$, dato $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^N$ con

$\gamma(t) \in \Omega \ \forall t \in [0,5]$, γ C^1 a tratti, $\vec{f}$ continua

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} \underset{\text{def}}{=} \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \quad (\in \mathbb{R})$$

Teorema (Caratterizzazione dei campi conservativi). Ω CONNESSO

$\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^N$ continuo. SONO equivalenti:

(a) $\vec{f}$ è conservativo in Ω (la conservatività dipende anche da Ω)

(b) Per ogni $\gamma: [0,5] \to \Omega$ curva chiusa, C^1 a tratti, si ha

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$

(c) Per ogni $\gamma_1, \gamma_2 : [0,5] \to \Omega$ curve C^1 a tratti con

$\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ si ha:

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

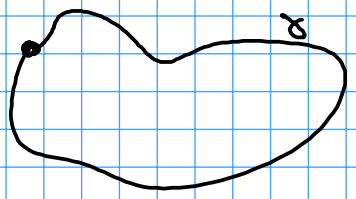
(l'integrale curvilineo dipende solo dagli estremi della curva)

Inoltre, se $\vec{f}$ è conservativo, i potenziali F di $\vec{f}$ sono dati da

$$F(P)\left(= \int_{P_0}^{P} \vec{f}\cdot d\vec{s}\right) = \int_{\gamma} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

dove $P_0 \in \Omega$ è fissato e γ è un qualunque cammino che congiunge P_0 e P

Dim. (c) $\Rightarrow$ (b) è OVVIA Infatti se γ è una curva chiusa $\gamma:[a,b]\to\Omega$ posso considerare $\gamma_1(t) = \gamma(a)(=\gamma(b))$, γ_1 è una curva costante



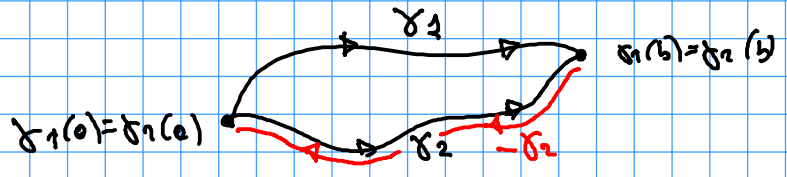
$\gamma_1' = 0$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0$$

$$\| \quad \text{per (c)}$$

$$\int_{\gamma} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Siano γ_1 e γ_2 aventi gli stessi estremi



Prendo $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ (nel senso degli incollamenti tra le curve)

$\gamma_1 + \tilde{\gamma}_2$

γ è una curva chiusa $\Rightarrow^{(b)}$ $\int_{\gamma} \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0$

$$\| \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_2} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

SONO UGUALI

(a) $\Rightarrow$ (b) Supponiamo $\vec{f}$ conservativo e γ chiuso.

$$\int_{\gamma} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \quad \text{(def. di integrale curvilineo)}$$

$$\int_a^b \nabla F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \quad \text{(perché } \vec{f} \text{ è conservativo)}$$

$= \int_0^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\, dt$ (derivata della funzione composta)

$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$

(c) $\Rightarrow$ (a) Per questo, fisso $P_0 \in \Omega$, e considero

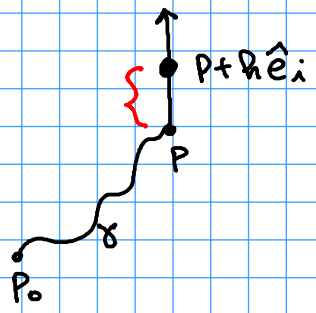
$$F(P) = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

dove γ è una qualunque curva C^1 a tratti che congiunge P_0 e P

DICO CHE F è C^1 e $\nabla F = \vec{f}$ ($\Rightarrow \vec{f}$ è conservativo e F è il potenziale)

Fissiamo una direzione $\hat{e}_i$ $\quad i = 1 \dots N$

Fissiamo $P \in \Omega$ e γ curva da P_0 a P



Se $h \in \mathbb{R}$, h piccolo, considero

$$\gamma_h(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } t \in [a,b] \\ \gamma(b) + h(t-b)\hat{e}_i & \text{se } t \in [b, b+1] \end{cases}$$

$\gamma + \hat{\gamma}_h$ dove $\hat{\gamma}_h$ è il segmento da $\gamma(b) = P$ a $\gamma(b) + h\hat{e}_i$

Calcolo

$$\frac{F(P+h\hat{e}_i) - F(P)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{\gamma_h} \vec{f} \cdot d\vec{s} - \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} \right) =$$

γ_h curva che congiunge P_0 e $P + h\hat{e}_i$

$$\frac{1}{h} \int_{\text{segmento}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{h} \int_0^1 \vec{f}(P + t h \hat{e}_i) \cdot h\hat{e}_i \, dt =$$

$$\int_0^1 f_i(P + t h \hat{e}_i)\, dt$$

DUNQUE $$\frac{F(P+h\hat{e}_i) - F(P)}{h} = \int_0^1 f_i(P + t h \hat{e}_i)\, dt$$

$\vec{f}$ è continua, se faccio tendere h a zero $f_i(P + t h \hat{e}_i) \to f_i(P)$ $\forall t \in [0,1]$

$|f| \le$ costante (integrabile su $[0,1]$)

Dal teorema di Lebesgue $\Rightarrow$

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(P+h\,e_i)-F(P)}{h} = \int_0^1 f_i(P)\,dt = f_i(P)$$

cioè $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(P) = f_i(P)$

Dato che f_i è continua (DIFF. TOTALE) $\Rightarrow$ F è C^1 e il gradiente di F è $\vec{f}$

QUINDI $\vec{f}$ è conservativo e F è un potenziale #

OSS. · Se F è un potenziale $\Rightarrow$ $F+c$ è un potenziale $c\in\mathbb{R}$

· Se Ω è convesso vale anche il viceversa: se F_1 e F_2 sono potenziali $\Rightarrow$ F_1-F_2 è costante (perché se $\nabla H=0 \Rightarrow H$ è costante quando Ω è convesso)

· Nel teorema di sopra ho scelto (arbitrariamente) un punto P_0 in cui $F(P_0)=0$

SUPPONIAMO che $\vec{f}$ sia di classe C^1 $\leftarrow$ posso derivare $\vec{f}$

Def. (a) Chiamo divergenza di $\vec{f}$ la funzione scalare

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}=\right)\ \operatorname{div}(\vec{f}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\dots+\frac{\partial f_N}{\partial x_N} \qquad (\operatorname{div}\vec{f}:\Omega\to\mathbb{R})$$

(b) SE $N=3$ (o $N=2$ considerando $\mathbb{R}^2\subset\mathbb{R}^3$) definisco il rotore di $\vec{f}$

$$\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{f}=\right)\ \operatorname{rot}(\vec{f}) := \left(\det\begin{pmatrix}\vec{i} & D_x & f_1\\ \vec{j} & D_y & f_2\\ \vec{k} & D_z & f_3\end{pmatrix}=\right) \left(\frac{\partial}{\partial y}f_3-\frac{\partial}{\partial z}f_2\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}f_1-\frac{\partial}{\partial x}f_3\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}f_2-\frac{\partial}{\partial y}f_1\right)\vec{k}$$

$\operatorname{rot}\vec{f}:\Omega\to\mathbb{R}^3$

Convenzione, in $\mathbb{R}^3$, di indicare $\vec{i}=\hat{e}_1$ $\vec{j}=\hat{e}_2$ $\vec{k}=\hat{e}_3$

Proposizione Se $\boxed{\vec{f}\ \text{è}\ C^1}$ e se $\vec{f}$ è conservativo $\Rightarrow$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad \text{per } i,j=1\dots N$$

Dim So che esiste un potenziale F. $\Rightarrow$

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_i} F \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$$

Per il teorema di Schwartz $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$ $\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i \text{ CONTINUE}\right)$

Def Diciamo che $\vec{f}$ è IRROTAZIONALE se $\dfrac{\partial}{\partial x_j} f_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} f_j$ per $i,j = 1 \cdots N$

LA PROP CI DICE

CONSERVATIVO $\Rightarrow$ IRROTAZIONALE

Nota Se $N=3$ $\vec{f}$ IRROTAZIONALE $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot} \vec{f} = 0$

Non è detto che IRROTAZIONALE $\Rightarrow$ CONSERVATIVO

Esempio $\vec{f}(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}\vec{\imath} - \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{\jmath}$ $\qquad \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{-x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

$\vec{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$

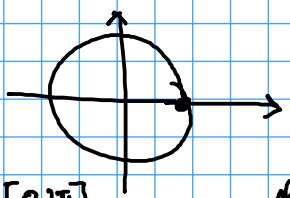
- Vediamo che $\vec{f}$ è irrotazionale:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{-x}{x^2+y^2} = \frac{-(x^2+y^2) + x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

SONO EGUALI !!

- Vediamo che NON è CONSERVATIVO.



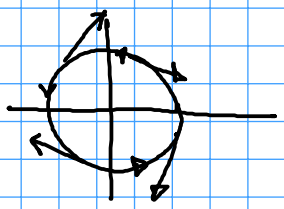
Consideriamo $\gamma(t) = R(\cos(t)\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath})$ $\quad t \in [0, 2\pi]$ $\quad R>0$ (fissato)

γ è una curva chiusa (che fa un giro attorno all'origine)

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\cos(t), \sin(t)) \cdot \underbrace{(-\sin(t)\vec{\imath} + \cos(t)\vec{\jmath})}_{\gamma'(t)} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{R\sin(t)}{R^2(\cos^2(t)+\sin^2(t))}\,\vec{\imath} - \frac{R\cos(t)}{R^2(\cos^2(t)+\sin^2(t))}\,\vec{\jmath} \right) \cdot R\left(-\sin(t)\,\vec{\imath} + \cos(t)\,\vec{\jmath}\right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left(-\sin^2(t) - \cos^2(t)\right) dt = -2\pi \neq 0$$



(R si semplifica)

Se tentassi di trovare un potenziale:

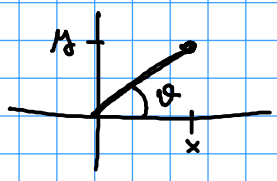
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$F = \int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{y}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}$$

$z = \frac{x}{y}$ $\quad x = yz \quad dx = y\,dz$

$$= \int \frac{dz}{z^2+1} = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c(y)$$

Si conclude: calcolo (...)



$\tan\theta = \frac{y}{x}$ nel I quadrante

trovo $F(x,y) = -\theta(x,y) = \mathrm{Arg}(x,y)$ = l'angolo θ: $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$

MA L'ARGOMENTO NON È DEFINITO CON CONTINUITÀ SU $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

DOPO UN GIRO TROVO UN SALTO

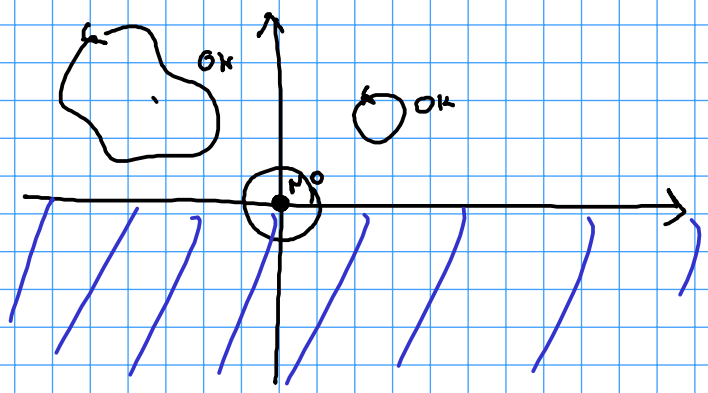
OSS. SE RIMANGO IN $\Omega = \{(x,y) \;\; y>0\}$ LA FUNZIONE

$\arctan\frac{x}{y}$ è un potenziale per $\vec{f}$

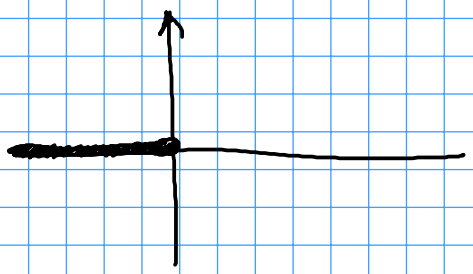
INFATTI $$\frac{\partial}{\partial x}\arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{\frac{x^2}{y^2}+1}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\cdot\frac{(-x)}{y^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

QUINDI $\vec{f}$ È CONSERVATIVO SU $\Omega = \{y>0\}$; NON È CONSERVATIVO SU $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



IN REALTÀ $\vec{f}$ È CONSERVATIVO SU $\mathbb{R}^2 - \{$semiretta che esce da zero$\}$



LA FORMA DEL DOMINIO DI $\vec{f}$ È IMPORTANTE PER AVERE $\vec{f}$ CONSERVATIVO

OSS. IL FATTO CHE il campo del primo esempio non fosse conservativo

$\vec{f}(x,y) = (x+y)\vec{i} + (-x+y)\vec{j}$ ← NON È IRROTAZIONALE

$\frac{\partial}{\partial y}(x+y) = 1 \qquad \frac{\partial}{\partial x}(-x+y) = -1$