Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 51 18/4/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

$x y'' - 3y' - y = x^5$ ← RISOLVERE PER SERIE DI POTENZE

$y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ $\quad y'(x) = \sum_1^\infty a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^\infty a_{n+1}(n+1) x^n$

$x y'' = x \sum_{n=2}^\infty a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=1}^\infty a_{n+1}(n+1) n x^n = \sum_{n=0}^\infty a_{n+1}(n+1) n x^n$ ← lo zero c'è ma

$\sum_{n=2}^\infty a_n n(n-1) x^{n-1} = \sum_{m=1}^\infty a_{m+1}(m+1) m x^m$

$n-1 = m \iff n = m+1$

IMPONGO CHE VALGA L'EQUAZIONE

$$\sum_{n=0}^\infty \left(a_{n+1}(n+1)n - 3a_{n+1}(n+1) - a_n \right) x^n = x^5 = \sum_{n=0}^\infty b_n x^n$$

dove $b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 5 \\ 1 & \text{se } n = 5 \end{cases}$

$$(R) \qquad a_{n+1}(n+1)(n-3) - a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 5 \\ 1 & \text{se } n = 5 \end{cases}$$

NOTO se $n = 3$ trovo $a_3 = 0$

ALLORA se $n = 2$ trovo $\underset{=0}{a_3} \cdot 3 \cdot (-1) - a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

se $n=1 \Rightarrow a_1 = 0$

se $n=0 \Rightarrow a_0 = 0$

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

cioè l'eventuale soluzione $y(x)$ ha derivate nulle in $x=0$ fino alla derivata 3ª $\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$

Se $n \geq 4$ posso scrivere

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{(n+1)(n-3)} \qquad \forall n \geq 4$$

(a_4 è libero)

Fissato a_4. Se $n=4$ trovo $a_5 = \frac{a_4}{5 \cdot 1} = \frac{a_4}{5}$

Se $n=5$ trovo $a_6 = \frac{a_5 + 1}{6 \cdot 2} = \frac{a_4}{60} + \frac{1}{12}$

Se $n \geq 6$ posso scrivere

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(n-3)} \qquad n \geq 6$$

, a coefficienti

(a_n) sono tutti determinati in modo univoco. IL RAGGIO DI CONVERGENZA lo trovo facendo

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n-3)} = 0 \iff R = +\infty$$

Dunque $y(x)$ è ben definita su $\mathbb{R}$

$$y(x) = a x^4 + a\frac{x^5}{5} + \left(\frac{a}{60} + \frac{1}{12}\right)x^6 + \sum_{n=7}^{\infty} a_n x^n$$

DOMANDA c'è qualche soluzione polinomiale ?!

L'UNICO MODO DI OTTENERE $a_n = 0 \quad \forall n \geq \bar{n}$ è di scegliere a IN MODO CHE $\frac{a}{60} + \frac{1}{12} = 0 \iff a = -5$

IN QUESTO MODO $a_6 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq 6$ e ho

$$y(x) = -5x^4 - x^5$$

ESERCIZIO

$$x y'' - (x+2) y' + 6y = 0$$

Solita idea: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$y'(x) = \sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \left(= \sum_{0}^{\infty} m a_n x^{n-1} \right) = \sum_{0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$y''(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{1}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^{n-1}$$

$$x y''(x) = \sum_{1}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^n = \sum_{0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^n$$

IMPONGO L'EQ

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\underbrace{a_{n+1}(n+1) n}_{xy'} - a_n n - \underbrace{2 a_{n+1}(n+1)}_{3y'} + 6 a_n \Big) x^n =$$

$$\sum_{0}^{\infty} \Big(a_{n+1}(n+1)(n-2) - (n-6) a_n \Big) x^n$$

$\Rightarrow$ (R) $\quad a_{n+1}(n+1)(n-2) = a_n (n-6) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Se $n=2 \Rightarrow a_2 = 0$

$n=1 \Rightarrow a_1 = 0$

$n=0 \Rightarrow a_0 = 0$

a_3 è libero e posso scrivere

$$a_{n+1} = a_n \frac{n-6}{(n+1)(n-2)} \qquad \forall n \geq 3$$

NOTO CHE se $n=6 \quad a_7 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq 7$

CI SONO SOLO a_3, a_4 a_5 e a_6 che posso scrivere esplicitam.

$a_3 = \alpha$; $a_4 = \alpha \frac{3-6}{4 \cdot 1} = -\frac{3}{4}\alpha$; $a_5 = -\frac{3}{4}\alpha \frac{4-6}{5 \cdot 2} = \frac{3}{20}\alpha$;

$a_6 = \frac{3}{20}\alpha \frac{5-6}{6 \cdot 3} = -\frac{\alpha}{120} \Rightarrow$

$$y(x) = \alpha \left(x^3 - \frac{3}{4} x^4 + \frac{3}{20} x^5 - \frac{1}{120} x^6 \right)$$

(e meno dieci...)

ESERCIZIO Calcolare la somma di $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n = f(x)$

CONVIENE CERCARE DI RICONDURCI A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

Se moltiplico per x $\Rightarrow$ $x e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$. Se derivo

$$\frac{d}{dx}\left(x e^x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n = f(x)$$ e quindi

$$f(x) = e^x + x e^x = (1+x) e^x$$

OPPURE $$\int f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \frac{x^{n+1}}{n+1} + cost = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x \sum \frac{x^n}{n!}$$

$$= x e^x + c$$

a questo punto derivo $\Rightarrow$ $f(x) = \frac{d}{dx}(x e^x) = (1+x) e^x$

ALTRO MODO (più semplice)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x \sum_{1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} =$$

$$x \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x e^x + e^x$$