Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 50 17/4/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Applicazione delle serie di Fourier per risolvere dei prob di eq. diff. alle derivate parziali

EQUAZIONE DEL CALORE (CASO UNIDIMENSIONALE NELLO SPAZIO)

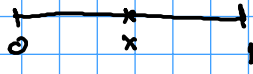
$L>0$ $[0,L] \subset \mathbb{R}$ Voglio risolvere.

(x è lo "spazio" - t è lo "tempo")

$f(x,t)$ assegnato; $u_0(x)$ assegnato

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) \overset{(c=1)}{=} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) + f(x,t) \\ u(0,x) = u_0(x) \qquad \text{(condizione al tempo } t=0) \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \qquad \text{(condizione agli estremi di } [0,L] \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

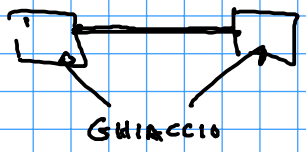
SI POSSONO CONSIDERARE ALTRE CONDIZIONE



$u(t,x)$ rappresenta la distribuzione della temperatura in una "sbarra omogenea". $f(t,x)$ è una sorgente di calore

u_0 è la Temperatura all'istante $t = 0$.

Le condizioni agli estremi ci dice che la temperatura è tenuta a zero

(per esempio 

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi}{L}$$

IDEA Cerco $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(n\tilde{\omega} x)$ METTO $f = 0$

(Fissato t sviluppo $u(t,x)$ in soliseni nell'intervallo $[0, L]$)

SE UNA TALE $u(t,x)$ risolve l'equazione (e se tutto va bene ---)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \sin(n\tilde{\omega} x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \left(-n^2\tilde{\omega}^2\right) \sin(n\tilde{\omega} x)$$

IMPONGO CHE VALGA L'EQUAZIONE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n'(t) + n^2\tilde{\omega}^2 b_n(t)\right) \sin(n\tilde{\omega} x) = 0$$

Per verificare la condizione sopra impongo che

$$b_n' + n^2\tilde{\omega}^2 b = 0 \qquad \forall n$$

$\leftarrow$ EQ. DIFF. ORDINARIA IN t CHE SO RISOLVERE

$$\Rightarrow \boxed{b_n(t) = b_n(0)\, e^{-n^2\tilde{\omega}^2 t}}$$

Se metto $t = 0$ trovo

$$u_0(x) = u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \sin(n\tilde{\omega} x)$$

DUNQUE $b_n(0) = u_{0,n} = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin(n\tilde{\omega} x)\, dx$

(AMMESSO CHE, PER ES, $u_0 \in L^2 \Rightarrow u_0 \underset{L^2}{=} \sum_1^{\infty} u_{0n} \sin(n\tilde{\omega} x)$)

ALLA FINE (se i conti fatti sono corretti) $\Rightarrow$

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{0,n}\, e^{-in\tilde{\omega}t} \sin(n\tilde{\omega}x)$$ ← !!

VERIFICHIAMO CHE EFFETTIVAMENTE LA u sopra è SOLUZIONE.

(Noto che le funzioni $\sin(n\tilde{\omega}x)$ si annullano in 0 e L e quindi spero che anche $u(t,0) = u(t,L) = 0$)

Vediamo la derivabilità in x e in t.

Chiamo $f_n(t,x) = b_{0,n}\, e^{-n^2\tilde{\omega}^2 t} \sin(n\tilde{\omega}x)$

FISSO $\bar{t} > 0$ Se faccio $\sup_{\substack{t\geq\bar{t}\\ 0\leq x\leq L}} |f_n(t,x)| = e^{-n^2\tilde{\omega}^2\bar{t}}$

ANZI $\sup_{\substack{t\geq\bar{t}\\ 0\leq x\leq L}} \left|\frac{\partial^k}{\partial t}f_n(t,x)\right| = (n^2\tilde{\omega}^2)^k e^{-n^2\tilde{\omega}^2\bar{t}}$ ← SOMMABILE A CAUSA DELL'ESP.

$$\text{(*)}\quad \sup_{\substack{t\geq\bar{t}\\ 0\leq x\leq L}} \left|\frac{\partial^k}{\partial x}f_n(t,x)\right| = (n\tilde{\omega})^k e^{-n^2\tilde{\omega}^2\bar{t}}$$ ($\forall t > 0$)

Applicando i teoremi sulle serie di potenze $\forall t \geq \bar{t}$ $\forall x \in [0,L]$

$\exists \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(t,x)$ $\exists \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t,x)$ e si può derivare per serie

IN PARTICOLARE, PER COSTRUZIONE

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u$$ (vale l'equazione su $t>0$, $0\leq x\leq L$)

INOLTRE DA (*) con $k=0$ abbiamo

$$u(t,x) \underset{\text{UNIF. IN } x}{=} \sum f_n(t,x) \quad \text{se } t>0$$

$\Rightarrow \quad u(t,0) = u(t,L) = 0 \qquad$ (perché $\quad f_n(t,0) = f_n(t,L) = 0$

RIMANE IL PROBLEMA DI VEDERE SE $\quad u(0,x) = u_0(x)$

PER AVERE QUESTO IMPONGO $\quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_{0,n}| < +\infty$

$\left(\Rightarrow u_0 \text{ è continua e } u_0(0) = u_0(L) = 0 \right)$, $u_0 \underset{\text{UNIF}}{=} \sum u_{0,n} \sin(n\tilde{\omega} x)$)

RICAVO CHE

$$\lim_{t \to 0^+} \| u(t,\cdot) - u_0 \|_\infty = 0 \quad \left(\Rightarrow \lim_{t \to 0} u(t,x) = u_0(x) \ \forall x \right)$$

in fatti $\| u(t,\cdot) - u_0 \|_\infty = \left\| \sum_1^\infty \left(e^{-n^2\tilde{\omega}^2 t} u_{0n} - 1 \right) \sin(n\tilde{\omega} x) \right\|_\infty \leq$

$$\sum_1^\infty \left\| \left(e^{-n^2\tilde{\omega}^2 t} - 1 \right) \sin(n\tilde{\omega} x) \right\|_\infty \leq \sum_1^\infty \left(e^{-n^2\tilde{\omega}^2 t} - 1 \right)$$

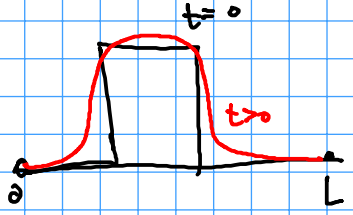
QUI POSSO APPLICARE UNA VERSIONE DEL TEOR DI LEBESGUE PER LE SERIE e ottengo che l'ultimo pezzo $\to 0$ (CI FIDIAMO)

IN REALTÀ SI VEDE CHE , se $u_0 \in L^2(L) \quad \Rightarrow$

$$\lim_{t \to 0} \| u(t,\cdot) - u_0 \|_{L^2} = 0 \qquad \left(u(t,\cdot) \to u_0 \text{ in } L^2 \right)$$

- LA VERIFICA DELLA CONDIZIONE INIZIALE $u(0,x) = u_0(x)$ DIPENDE DALLA REGOLARITÀ DI u_0
- SE $t > 0$ LA $u(t,x)$ diventa C^∞ !!

(EFFETTO REGOLARIZZANTE)



INVECE DELLA CONDIZIONE $u(t,0) = u(t,L) = 0$

POTREI CONSIDERARE $\frac{\partial}{\partial x} u(t,0) = \frac{\partial}{\partial x} u(t,L) = 0$

(SIGNIFICA CHE NON CI SONO SCAMBI DI CALORE AGLI ESTREMI)

LO POSSO RISOLVERE COME PRIMA CERCANDO $u(t) = \sum_{0}^{\infty} b_n(t) \underbrace{\cos(n\tilde{\omega} x)}$

VERIFA LA COND. AL BORDO

UNA TERZA CONDIZIONE PUO' ESSERE LA CONDIZIONE DI PERIODICITÀ

$$u(t,0) = u(t,L) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} u(t,0) = \frac{\partial}{\partial x} u(t,L)$$

(LA SBARRA È UN ANELLO)

IN QUESTO CASO CERCO $u(t) = \sum a_n(t) \cos(n\omega t) + b_n(t) \sin(n\omega t)$

QUALCHE ALTRO ESERCIZIO

Studiare la conv. della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\, x^3}{1+n^2x^4}$ su $[0,+\infty[$

(1) Dove converge? (CONV. PUNTUALE — DOMINIO DI $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x^3}{1+n^2x^4}$)

$\forall x \geq 0 \qquad f_n(x) = \frac{\sqrt{n}\, x^3}{1+n^2x^4}$ $\begin{cases} = 0 & \text{se } x = 0 \\ \leq c\,\frac{\sqrt{n}}{n^2} & \text{converge se} \end{cases}$

CONV. PT. SU $[0,+\infty[$ $\iff$ $f(x)$ è definita $\forall x \geq 0$

(2) f è continua ?? MI SERVE LA CONV. UNIF.

PROVO LA CONV. TOTALE SU $[0,+\infty[$. CERCO

$\max_{x\geq 0} |f_n(x)| = \max_{x \geq 0} f_n(x)$ STUDIO $f_n(x)$

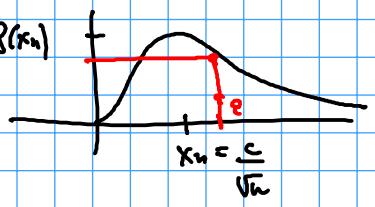
$f_n(0) = 0 \qquad f_n(\infty) = \infty \qquad f_n'(x) = \sqrt{n}\, \frac{3x^2(1+n^2x^4) - x^3 4n^2x^3}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{\sqrt{n}\, x^2}{(\quad)^2}\left(3 - n^2x^4\right)$

il pto di max è $x_n = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{n}}$ $\left(m^2 x^4 = 3 \right)$

$$\max = f_n(x_n) = \frac{\sqrt{n}\ \frac{3^{\frac{4}{3}}}{n^{3/2}}}{(1+3)} = \frac{3^{\frac{4}{3}}}{4}\ \frac{1}{n}$$ NON È SOMMABILE

NON C'È CONV. TOTALE SU $[0,+\infty]$.

$\frac{c_1}{n} = f(x_n)$



Dato che i pti di max tendono a ZERO MI VIENE L'IDEA DI "SCOSTARMI DA ZERO" FISSO $\varepsilon > 0$ e faccio

$$\max_{x \geq \varepsilon} f_n(x) = \begin{cases} \frac{c}{n} & \text{se } x_n \geq \varepsilon \text{ (SOLO UN NUMERO FINITO DI } n) \\ f_n(\varepsilon) = \frac{\sqrt{n}\,\varepsilon^3}{1+n^2\varepsilon^4} & \leftarrow \text{SOMMABILE} \end{cases}$$

$$\sum_1^{\infty} \|f_n\|_{\infty,[\varepsilon,\infty[} = \sum_n^{n_0} \frac{c_1}{n} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f_n(\varepsilon) < +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie conv. TOTALMENTE su $[\varepsilon, +\infty[$ $\Rightarrow$ f è cont. in $[\varepsilon, +\infty[$ $\forall \varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ f è cont. in $]0, +\infty[$

NON POSSO DIRE CHE È CONTINUA IN $x = 0$

$(\exists)$ VEDIAMO CHE f NON È CONT. IN $x=0$ ($\Rightarrow$ la serie non conv. uni. f. su $[0,+\infty[$). Prendo $m \in \mathbb{N}$ e valuto $f\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) = f\left(m^{-1/2}\right)$

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt{m}}\right) = \sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{n}\ m^{-\frac{3}{2}}}{1 + m^2 m^{-2}} \geq m^{-\frac{3}{2}} \sum_1^{m} \frac{\sqrt{n}}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} \geq m^{-\frac{3}{2}} \sum_1^{m} \frac{\sqrt{n}}{2} \geq$$

(MOTIVO DELLA SCELTA $\sqrt{m}$)

$$\frac{m^{-\frac{3}{2}}}{2} \frac{m^{3/2}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \text{costante} > 0$$

DUNQUE $f(x)$ NON PUÒ TENDERE A ZERO!

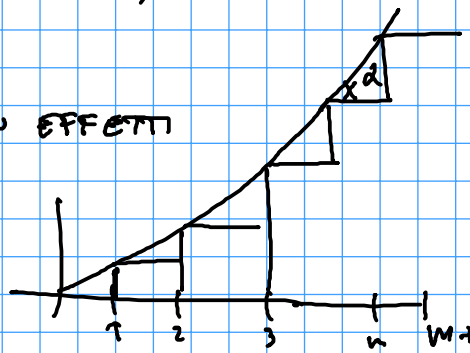
MI SERVE UNA VALUTAZIONE DI $\sum_1^m \sqrt{n}$ (so che diverge ma con che ordine??)

VALE $\boxed{\sum_1^m n^{\alpha} \simeq \frac{m^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$ $(\alpha > 0)$

...

$$\sum_1^m n^{\alpha} = \int_1^{m+1} [x]^{\alpha}\, dx \quad (*)$$

IN EFFETTI



$$\int_1^{m+1} (x-1)^\alpha \, dx \le (*) \le \int_1^{m+1} x^\alpha \, dx \qquad x-1 < [x] \le x$$

$$\shortparallel$$

$$\int_0^m x^\alpha \, dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^m = \boxed{\frac{m^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$$

quindi $\displaystyle\sum_1^m n^\alpha \ge \frac{m^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ (dall'altra disuguaglianza trovo anche che è asintotic. minore)

ESERCIZIO

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \frac{1}{1+n^2x^2} \qquad \sum_1^\infty f_n(x) \quad \text{su } \mathbb{R}$$

(1) conv. puntuale $\forall x$ $\quad \underbrace{f_n(x) \le \frac{1}{n^2}}_{\varphi}$

CONV. TOTALE $\quad \|f_n\|_0 \le \frac{1}{n^2} \leftarrow$ SOMMABILE

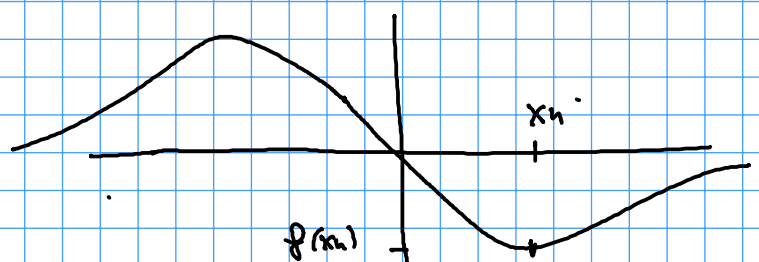
DUNQUE HO CONV. TOTALE $\Rightarrow$ UNIF $\Rightarrow$ f continua su $\mathbb{R}$

e $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

(2) Vediamo la derivabilità: Devo trovare una conv. unif della serie delle derivate. Calcolo f_n'

$$f_n'(x) = \frac{1}{n^2} \frac{-n^2 2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+n^2x^2)^2}$$

CERCO il $\displaystyle\max_{\mathbb{R}} |f_n'(x)|$ $\leftarrow$ STUDIO $f_n'(x)$



$$f_n''(x) = \frac{-2(1+n^2x^2)^2 + 2x\,2(1+n^2x^2)\,n^2 2x}{(1+n^2x^2)^4} = \frac{-2(1+n^2x^2) + 8n^2x^2}{(1+n^2x^2)^3} =$$

$$\frac{2}{(\quad)^3}\left(3n^2x^2 - 1\right) \qquad \text{si annulla in } \pm x_n \text{ dove } x_n = \frac{1}{\sqrt{3}\,n}$$

$$f_n(x_n) = \frac{-2x_n}{16} = -\frac{c}{n} \qquad \text{con } c = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot 8}$$

$$\|f_n'\|_{B(0,\mathbb{R})} = \frac{c}{n} \quad \leftarrow \text{NON È SOMMABILE}$$

PER TROVARE UNA CONV. UNIF. DEVO "SCANSARE LO ZERO". FISSO $\varepsilon > 0$

$$\max_{|x|\geq\varepsilon} |f_n'(x)| = \begin{cases} \frac{c}{n} & \text{se } x_n \geq \varepsilon \quad (\text{POCHI } n) \\ |f_n(\varepsilon)| = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2 n^2} & \leftarrow \text{SOMMABILE se } x_n < \varepsilon \text{ quasi tutti gli } n \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ CONV. TOT. SU $\{|x| \geq \varepsilon\}$ $\Rightarrow$

(Dato che anche $\sum f_n$ CONVERGONO) $f'(x)$ esiste se $|x| \geq \varepsilon$

e si può derivare per serie. Per l'arbitrarietà di ε

$\Rightarrow$ f è derivabile su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e

$$f'(x) = \sum f_n'(x) \qquad \left(\text{e } \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0\right)$$

RIMANE DA CAPIRE SE f è derivabile in $x=0$

VEDIAMO CHE f' NON È CONTINUA IN $x=0$

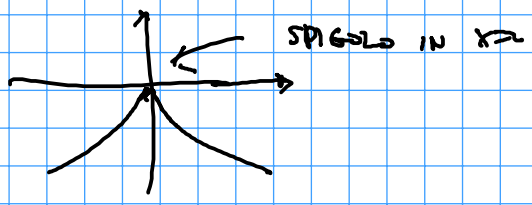
Basta far vedere che $f'(x)$ NON TENDE A 0 se $x \to 0$

Preso $m \in \mathbb{N}$ e stimo

$$-f'\left(\frac{1}{m}\right) = \sum_{1}^{\infty} \frac{2\,1/m}{(1+(n/m)^2)^2} \geq \frac{2}{m}\sum_{1}^{m} \frac{1}{(1+(n/m)^2)^2} \geq \frac{2}{m}\sum_{1}^{m} \frac{1}{(1+1^2)^2} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{m}\sum_{1}^{m} 1 = \frac{1}{2}$$

NON PUÒ TENDERE A ZERO

"MOMENTS"

$\rho(x) \simeq$