Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 49 16/4/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Teorema (Serie di Fourier per funzioni a energia finita)

$$L^2_T = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ T\text{-periodica misurabile con } \int |f(t)|^2 < +\infty \}$$

$f_n \xrightarrow{L^2} f$ se $\lim_{n\to\infty} \int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 = 0$ cioè

$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$

dove $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2\, dt}$

(a) Se $f \in L^2_T$ (f ha energia finita) allora

$$f \overset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n \qquad \left(e_n = e^{inx}\right)$$

(cioè $\left\| \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k - f \right\|_2 \to 0$)

Inoltre (i c_n sono i soliti coeff.)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2\, dt$$

(Parseval).

(b) Se $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ è una "successione" in $\mathbb{C}$ tale da

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$ allora esiste $f \in L^2_T$ tale che

$f \underset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$. Inoltre $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\overline{e_n(t)}\,dt$

IN L^2 C'È UN PARALLELISMO PERFETTO TRA $f \in L^2_T$ e

(c_n) a quadrato sommabile

TUTTO QUESTO HA UN CORRISPONDENTE REALE

(a) Se $f \in L^2_T(\mathbb{R})$ allora

$$f \underset{L^2}{=} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

(CIOÈ $\|f - a_0 - \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega t) - \sin(k\omega t)\|_2 \to 0$)

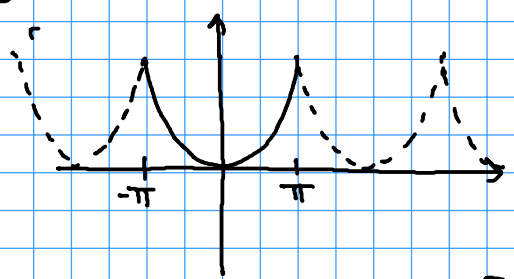
dove $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)$ $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)$, $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin$ $(n \geq 1)$

Inoltre
$$\int_0^T f(t)^2\,dt = T a_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

(b) Se viceversa $\sum_1^{\infty} a_n^2 < +\infty$ $\sum_1^{\infty} b_n^2 < +\infty$ allora esiste $f \in L^2_T(\mathbb{R})$ tale che $f \underset{L^2}{=} a_0 + \sum_1^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$

e vale .

Esercizio



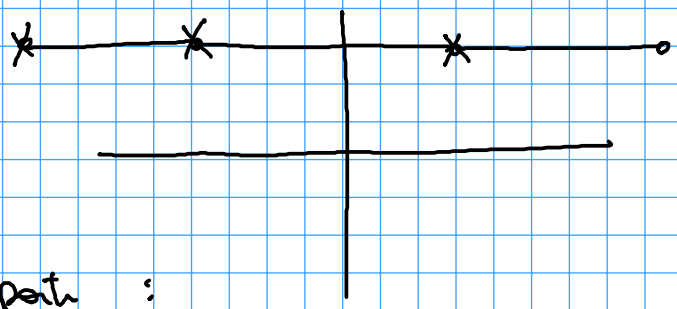
$f(t) = t^2$ 2π-periodica

$-\pi \leq t \leq \pi$ $\left(\Downarrow \omega = 1\right)$

f PARI $\Rightarrow$ $b_n = 0$ $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt)\,dt$ $n \geq 1$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

$f'(t) = 2t \qquad f''(t) = 2$



a_n lo calcolo per parti:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[t^2\,\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0 \text{ per } (t,n)\to(\pi,\infty)} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} 2t\sin(nt)\,dt =$$

$$-\frac{1}{\pi n}\left[\frac{2t\,(-\cos(nt))}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos(nt)\,dt}_{=0} =$$

$$\frac{1}{\pi n^2}\,4\pi\cos(n\pi) = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

COSA POSSO DIRE SULLA CONVERGENZA ?!?

($a_0 = \frac{\pi^2}{3}$ $\qquad n\geq 1$ $\qquad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$)

Dato che $|a_n| \leq \underbrace{\frac{4}{n^2}}_{\text{SOMMABILE}} \Rightarrow f \underset{(\text{UNIF.})}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nt)$

Noto che dall'esame della sola f (che è continua) ricavo solo la conv. puntuale.

OSS. la convergenza UNIFORME $\Rightarrow$ CONV. L^2

NOTA Se $\sum |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum |a_n|^2 < +\infty$ dato che

$\sum |a_n| < +\infty \Rightarrow a_n \to 0 \Rightarrow$ gli a_n sono limitati,

cioè $|a_n| \le M \ \forall n \Rightarrow$

$$\sum a_n^2 \le M \sum |a_n| < +\infty$$

DUNQUE

$$f(t) = \underset{(\text{UNIF.})}{\frac{\pi^2}{3}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nt)$$

Se metto $t = 0$ TROVO

$$0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Se metto $t = \pi$ TROVO

$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

($\cos(n\pi) = (-1)^n$)

$$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \pi^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

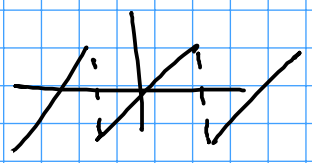
UN'ALTRA FORMULA CHE SI PUÒ RICAVARE È QUELLA CHE SEGUE DA PARCEVAL:

$$\frac{2}{5}\pi^5 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt = 2\pi a_0^2 + \pi \sum a_n^2 = \frac{2\pi^5}{9} + \pi \sum_{1}^{\infty} \frac{16}{n^4}$$

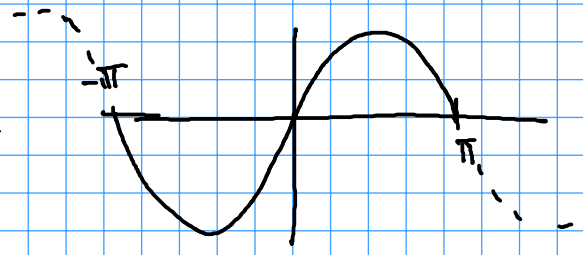
$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} t^4\,dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^5}{5} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{5}\pi^4 - \frac{2}{9}\pi^4\right) = \frac{\pi^4}{8}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) = \pi^4 \frac{4}{8 \cdot 45} = \frac{\pi^4}{90}$$

NOTA $a_n \simeq \frac{1}{n^2}$ $\quad n a_n \simeq \frac{1}{n}$ NON È SOMMABILE : IN EFFETTI f' NON È CONTINUA



ESEMPIO



$$f(t) = \begin{cases} t(\pi - t) & \text{in } [0, \pi] \\ t(\pi + t) & \text{in } [-\pi, 0] \end{cases}$$

e poi "periodizzata" di periodo 2π $\quad (\Rightarrow \omega = 1)$

NOTA CHE

$$f'(t) = \begin{cases} \pi - 2t & \text{in } [0, \pi] \\ \pi + 2t & \text{in } [-\pi, 0] \end{cases}$$

$f'(\pi) = -\pi$

$f'(-\pi) = -\pi$ ← SI RACCORDA

f' esiste continua in $\mathbb{R}$!! (MI ASPETTO UNA MIGLIORE SOMMABILITÀ DEI b_n)

NOTA f DISPARI $\Rightarrow$ $a_n = 0$ $\forall n$.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t(\pi - t) \sin(nt)\, dt = \quad \text{(per parti)}$$

$$\frac{2}{\pi} \left[\frac{t(\pi - t)(-\cos(nt))}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} (\pi - 2t) \cos(nt)\, dt =$$

$t(\pi - t)$ VALE ZERO IN 0 e π $\Rightarrow$ il primo termine $= 0$

(di nuovo per parti)

$$\frac{2}{n\pi} \left[(\pi - 2t) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n^2 \pi} \int_0^{\pi} (-2) \sin(nt)\, dt =$$

$\sin(n\pi) = 0$ $\Rightarrow$ il primo termine $= 0$

$\int_0^{\pi}$ SU MEZZO PERIODO (NON FA ZERO)

$$\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\,dt = \frac{4}{n^2\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n^3}\left(1-\cos(n\pi)\right)$$

$$\Rightarrow \quad b_n = \frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^3} = \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \\ \frac{8}{\pi n^3} & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

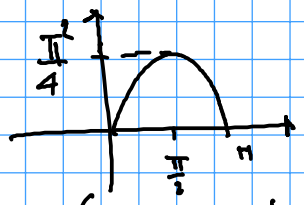
DUNQUE $|b_n| \le \frac{8}{n^3\pi}$ SOMMABILE

$n|b| \le \frac{8}{n^2\pi}$ SOMMABILE $\Rightarrow$ la serie e la serie delle derivate convergono unif e si può derivare per serie

e posso scrivere

$$f(t) \underset{\text{UNIF}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)^3}\sin\left((2k+1)t\right)$$

Mettiamo $t = \frac{\pi}{2}$



$$\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(k\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(k\pi) = (-1)^k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{\pi(2k+1)^3}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

VEDIAMO COSA ESCE DA PARCEVAL.

DEVO CALCOLARE $\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,dt = 2\int_0^{\pi} t^2(\pi-t)^2\,dt =$

$$2\int_0^{\pi} t^2(\pi^2 - 2\pi t + t^2)\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\pi^2 - \frac{t^4}{4}2\pi + \frac{t^5}{5}\right]_0^{\pi} =$$

$$2\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)\pi^5 = 2\,\frac{10-15+6}{30}\,\pi^5 = \frac{\pi^5}{15}$$

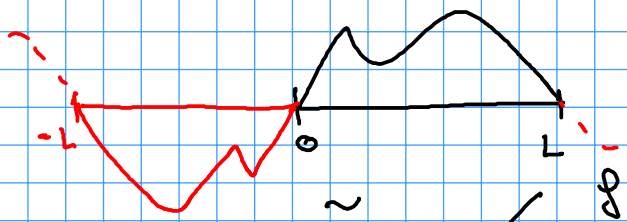
Per Parseval

$$\frac{\pi^5}{15} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{64}{\pi^2 (2k+1)^6} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{64 \times 15}$$

UN'ALTRO UTILIZZO DI FOURIER:

PRENDO $L > 0$ e $f : [0, L] \to \mathbb{R}$. PONGO $\boxed{\tilde{\omega} = \frac{\pi}{L}}$



Se definisco $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{in } [0, L] \\ -f(-x) & \text{in } [-L, 0] \end{cases}$ TROVO UNA FUNZ. DISPARI

ed estendo $\tilde{f}$ a tutto $\mathbb{R}$ in modo $2L$ periodico (NOTA CHE $\tilde{\omega} = \frac{2\pi}{2L}$)

$(T = 2L)$

Se sviluppo $\tilde{f}$ in serie di Fourier trovo $a_n = 0$ e

$$b_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^{L} \underbrace{\tilde{f}(t) \sin(n \tilde{\omega} t)}_{\text{PARI}} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n \tilde{\omega} x) dx$$

SE LA SERIE CONVERGE e $\tilde{f}$, IN PARTICOLARE su $[0, L]$ converge alla f di partenza $\Rightarrow$ ho trovato

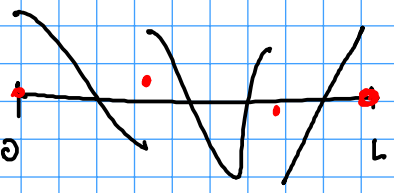
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\sin(n \tilde{\omega} x)}_{\text{SONO NULLE IN } 0 \text{ e } L} \quad \text{in } [0, L] \quad (\star)$$

Ho SVILUPPATO f in SERIE DI SOLI SENI

DA QUANTO VISTO SULLE SERIE DI FOURIER RICAVO:

① Se f è C^1 a tratti su $[0,L]$ la serie in (*) converge puntualmente a $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ $\forall x \in]0,L[$

NEI PUNTI 0, e L converge a ZERO



② Se HO UNA SUCC. (b_n) t.c. $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty \Rightarrow$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\tilde{\omega} x)$ converge UNIF. A UNA $f(x)$

$\Rightarrow f$ è continua su $[0,L]$ e $f(0) = f(L) = 0$

& più in generale $\sum_{n=1}^{\infty} n^k |b_n| < +\infty \Rightarrow$

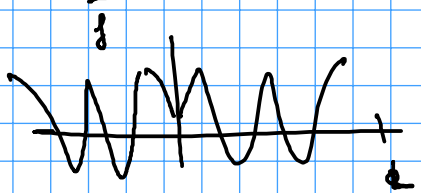
f è di classe C^k; di più deriva per serie

(le derivate pari sono serie di seni / le dispari sono serie di coseni)

IN PARTICOLARE $f^{(2m+1)}(0) = f^{(2m+1)}(L)$ se $1 \le 2m+1 \le k$

ANALOGAMENTE POSSO SVILUPPARE IN SOLI COSENI !

Basta estendere f su $[-L,0]$ in modo pari



$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \tilde{f} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$

$m \ge 1$ $a_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(m\tilde{\omega}x)\,dx$

e valgono gli stessi risultati della serie ($\sum |a_n| < +\infty$ .. CONV.UNIF. ...)

In particolare se $\sum_{n=P}^{\infty} |a_n| n^k < +\infty \Rightarrow f$ è di classe C^k

e derivate pari si annullano in 0 e L.

Per esempio

$f(x) = \cos(x)$ in $[0, 2\pi]$

Lo posso sviluppare in soli seni nell'intervallo $[0, 2\pi]$ $\quad \tilde{\omega} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ TROVERO

$$\cos(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right) \qquad b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)dx = (\text{per parti}) =$$

$$\underbrace{\frac{1}{\pi}\left[\sin(x)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)dx\ \frac{n}{2} =$$

$$(\text{per parti}) = -\frac{n}{2\pi}\left[-\cos(x)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos(x)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)dx\ \frac{n^2}{4\pi}$$

$$= \frac{n}{2\pi}\left(\cos(n\pi) - 1\right) + \frac{n^2}{4}b_n \iff$$

OK MA se $n=2$ non mi permette di trovare b_2

$$b_n\left(1 - \frac{n^2}{4}\right) = \frac{n}{2\pi}\left((-1)^n - 1\right) \iff$$

$$b_n = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi}\ \frac{n}{1 - \frac{n^2}{4}} = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi}\ \frac{4n}{4 - n^2} =$$

$$2\frac{(-1)^n - 1}{\pi}\ \frac{n}{4 - n^2}$$ se $n \neq 2$

b_2 lo devo trovare in un altro modo!!

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x)\sin(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x)\,dx = 0$$

ALLA FINE

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ PARI} \\ \dfrac{4}{\pi} \dfrac{n}{n^2-4} \end{cases}$$

e quindi

$$\cos(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{(2k+1)^2 - 4} \sin\left(\left(\frac{2k+1}{2}\right) x\right) \qquad \begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq 2\pi \end{matrix}$$