Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 48 11/4/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

FUNZIONI DI "ENERGIA" FINITA E SERIE DI FOURIER.

IDEA CONSIDERO LA SEGUENTE NORMA PER UNA FUNZIONE

$f: A \to \mathbb{R}^M$

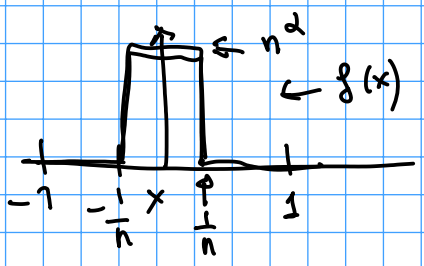
$$\|f\|_2^2 := \int_A f^2(x)\,dx \quad \leftarrow \text{ENERGIA DI } f$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_A f^2(x)\,dx}$$

Se f è a valori complessi $\|f\|_2^2 = \int_A |f|^2\,dx$ ← MODULO DI UN NUMERO COMPLESSO

MISURO LA "DISTANZA DI f DA ZERO" (NON con $\|f\|_\infty = \max_A |f|$)

MA MEDIANTE UN INTEGRALE PER ESEMPIO



$$f(x) = \begin{cases} n^\alpha & \text{se } -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(la penso definita su $[-1,1]$)

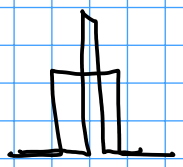
$$\|f\|_\infty = n^\alpha$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} f^2\,dx\right)^{1/2} = \left(\int_{-1/n}^{1/n} (n^\alpha)^2\right)^{1/2} = \left(\frac{2n^{2\alpha}}{n}\right)^{1/2}$$

$\Rightarrow \quad \|f\|_2 = \frac{\sqrt{2}n^2}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}\, n^{2-1/2}$ $\qquad$ (mentre $\|f\|_\infty = n^2$)

Al variare di α ho una successione di funzioni t.c. $(\alpha > 0)$

$$f_n(x) \to \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$\|f_n\|_\infty \to \infty$

$\|f_n\|_2 \to \infty$ se $\alpha < \frac{1}{2}$

Mediante la norma 2 posso una nozione di convergenza "in energia"

Def. Dico che f_n tende a f in energia se:

$$\left(f_n \xrightarrow{2} f \quad / \quad f_n \to f \text{ in energia}\right) \text{ se}$$

$$\|f_n - f\|_2 \to 0 \quad \text{cioè se} \quad \lim_{n\to\infty} \int_A |f_n(x) - f(x)|^2 = 0$$

È UNA NOZIONE DI CONVERGENZA TRA LE FUNZIONI CHE È DIVERSA DALLA CONV. UNIF. (IN GENERALE È PIÙ DEBOLE)

C'È UN PROBLEMA Si vede facilmente che $\|\cdot\|_2$ ha tutte le proprietà formali della norma TRANNE UNA

- $\|f\|_2 \geq 0$
- $\|tf\|_2 = |t|\,\|f\|_2$
- $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$

NON VALE $\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$ SE SOLO CHE $\int |f|^2 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ quasi ovunque

per esempio se $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irrazionale} \\ 1 & x \text{ razionale} \end{cases}$

$\|f\|_2 = 0$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA: SE $f = g$ quasi ovunque le considero uguali

Per quanto ci interessa la funzione $f = 0$ ovunque e la funzione $g = \begin{cases} 0 & \text{su } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1 & \text{su } \mathbb{Q} \end{cases}$ sono lo STESSO OGGETTO (funzioni definite quasi ovunque)

CON QUESTA IDEA DEFINISCO

$$L^2_T(\mathbb{R}) \,/\, L^2_T(0) =$$

$$\left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/0 \ \text{tali che } f \text{ è } T\text{-periodica, misurabile, } \int_0^T |f(t)|^2 < +\infty \right\}$$

definita quasi ovunque

(spazio delle funzioni T-periodiche con energia finita)

L^2_T è uno spazio vettoriale e in L^2_T è definito il prodotto scalare

$$\boxed{\langle f, g \rangle_2 := \int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,dt}$$

(se le funzioni sono a valori reali il coniugato non serve)

- SI VEDE CHE $\langle f, g \rangle_2$ è ben definito se $f, g \in L^2_T$ perché

$$|f(t)\,\overline{g(t)}| \le \frac{1}{2}\left(|f(t)|^2 + |\overline{g(t)}|^2\right) = \frac{1}{2}\left(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\right)$$

(entrambi INTEGRABILI)

- $\langle f, g \rangle_2$ è una funzione bilineare e

$$\langle f, f \rangle_2 = \|f\|_2^2$$

QUINDI LA NORMA 2 DERIVA DA UN PRODOTTO SCALARE

FATTO CHIAVE: Se $e_m(t) = e^{imt}$ si ha

$$\langle e_m, e_m \rangle_2 = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ T & \text{se } n = m \end{cases}$$

INTERPRETAZIONE: gli e_n sono "ORTOGONALI" TRA LORO e $\|e_m\|_2 = \sqrt{T}$ (se considerassi $\frac{e_n}{\sqrt{T}}$ sarebbero ORTONORMALI)

DEVO IMMAGINARE GLI e_n COME UNA BASE ORTOGONALE DI L^2_T E IN QUESTO MODO LA SERIE DI FOURIER CORRISPONDE A SVILUPPARE f rispetto a questa BASE

CERCHIAMO DI FORMALIZZARE QUESTA IDEA.

Def. Dato $n \in \mathbb{N}$ pongo

$$E_n = \left\{ \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e_k \quad \lambda_{-n} \dots \lambda_0 \dots \lambda_n \in \mathbb{C} \right\} \subset L^2_T$$

è lo spazio generato dagli e_k con $|k| \le n$ (dimensione $2n+1$)

INOLTRE DATA $f \in L^2_T(\mathbb{C})$ pongo

$$f_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \qquad \text{dove } c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f \cdot e_{-k} = \frac{1}{T}\langle f, e_k \rangle_2$$

FATTI Si ha:

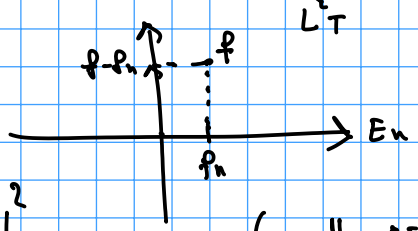
(a) $f_n \in E_n$ (ovvio)

(b) $\forall\, g \in E_n$ si ha:

$$\langle f - f_n, g \rangle_2 = 0$$

(c) $\|f - g\|_2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n - g\|_2^2 \qquad \forall g \in E_n$

$\Leftrightarrow$ f_n è l'elemento in E_n che ha minima distanza da f tra tutti gli elementi di E_n



(d) $\|f_n\|_2^2 = \|f_n\|_2^2 + \|f - f_n\|_2^2$ (metto $g=0$ in (c))

Dim

VEDIAMO LA (b) cioè:

$$\langle f - f_n, g \rangle_2 = 0 \qquad \forall \quad g \in E_n$$

PRENDO $g = e_k$ con $|k| \le n$. Faccio

$$\langle f - f_n, e_k \rangle_2 = \langle f, e_k \rangle_2 - \langle f_n, e_k \rangle_2 = T c_k - \langle f_n, e_k \rangle$$

$$\langle f_n, e_k \rangle = \left\langle \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j, e_k \right\rangle = \sum_{j=-n}^{n} c_j \langle e_j, e_k \rangle = T c_k \quad (??)$$

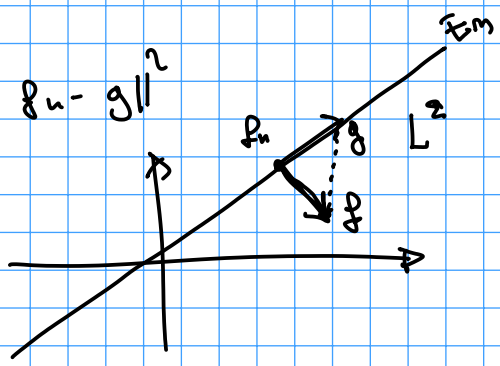
($\langle e_j, e_k \rangle = 0$ se $j \neq k$, $= T$ se $j = k$)

DUNQUE LA n DIFFERENZA FA ZERO

Se $g = \sum_{-m}^{n} \lambda_k e_k$ è chiaro (per linearità) che vale la proprietà

VEDIAMO (c) CIOÈ

$$\| f - g \|_2^2 = \| f - f_m \|^2 + \| f_m - g \|^2$$



Sia $g \in E_m$. Sa che $g - f_m \in E_m \Rightarrow$

$$\langle f - f_m, f_m - g \rangle = 0 \qquad \text{(per (c))}$$

Allora

$$\| f - g \|_2^2 = \langle f - g, f - g \rangle_2 = \langle (f - f_m) + (f_m - g), (f - f_m) + (f_m - g) \rangle_2 =$$

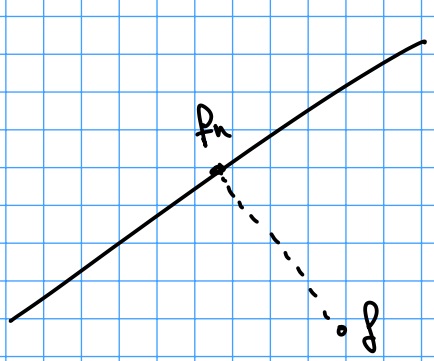
$$\langle (f - f_m), (f - f_m) \rangle_2 + \langle f - f_m, \underbrace{f_m - g}_{\in E_m} \rangle_2 + \langle \underbrace{f_m - g}_{\in E_m}, f - f_m \rangle_2 + \langle f_m - g, f_m - g \rangle_2$$

$$\| f - f_m \|^2 + \| f_m - g \|^2 \qquad \text{(TEOREMA DI PITAGORA - -)}$$

NE SEGUE

$$\| f - f_m \| \leq \| f - g \| \qquad \forall g \in E_m$$

e quindi: f_m è la "proiezione di minima distanza L^2 di f su E_m"



(d) se metto $g = 0$ trovo $\| f \|_2^2 = \| f_m \|^2 + \| f - f_m \|_2^2$

NOTIAMO CHE $\| f_m \|_2^2 = \left\| \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|_2^2 =$ (per l'ortogonalità) -

$$\sum_{h,k=-n}^{n} c_k \overline{c_h} \underbrace{\langle e_k, e_h \rangle}_{\substack{0 \text{ se } k \neq h \\ T \text{ se } k = h}} = T \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

DUNQUE LA (d) si scrive

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2 = T \sum_{k=-m}^{n} |c_k|^2 + \|f_m - f\|_2^2 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

$\to T \sum_{-n}^{n} |c_k|^2$

DUNQUE se $f \in L^2_T$ $\quad \sum_{k=\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \leq \int_0^T f(t)^2 dt < +\infty$

VORREI MANDARE m a $+\infty$. CHE SUCCEDE ?!

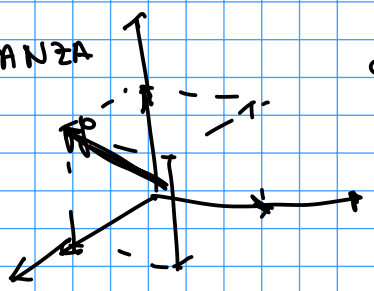
Teorema $\quad f \in L^2_T(\mathbb{C}) \iff \sum |c_k|^2 < +\infty$. Inoltre

se $f \in L^2$ $\quad \sum_{-n}^{n} c_k e_k \xrightarrow{L^2} f$ (IN ENERGIA) e

$$\int_0^T f^2(t)\, dt = T \sum |c_k|^2 \quad \text{(EGUAGLIANZA DI PARSEVAL)}$$

(NO DIM)

DUNQUE c'è UNA CORRISPONDENZA PERFETTA TRA L'INTEGRABILITÀ DI f^2 e la sommabilità dei c_k^2. L'EGUAGLIANZA DI PARSEVAL DICE IN SOSTANZA che $\|f\|_2^2 =$ somma dei $\|c_k e_k\|_2^2$



TUTTO QUESTO SE AMMETTO LA CONV. IN ENERGIA DELLE APPROSSIMANTI DI f.