Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 47 10/4/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

$T>0$ (periodo) $\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

Dato f T periodica ($f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$) considero i "coeff. di Fourier" complessi

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$$

Visto che (1) se f è "C^1 a tratti" (con un numero finito di "salti")

$\Rightarrow$ la serie di Fourier: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$ CONVERGE

PUNTUALMENTE a $\dfrac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ $\left(= f(t) \text{ se } f \text{ continua in } t\right)$

CRITERIO PER LA CONV. UNIF ?!

TEOREMA Se f è C^1 $\Rightarrow$ la serie di Fourier converge unif. a f. Posso dimostrarlo nel caso $f \in C^2$. Infatti

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t} \overset{\text{(per parti)}}{=} \frac{1}{T}\left[f(t)\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}\right]_0^T + \frac{1}{in\omega}\int_0^T f'(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = \text{(per parti)}$$

$\left[\cdots\right]_0^T = 0$ dato che $f(T)=f(0)$ e lo stesso vale per $e^{-in\omega t}$

$$\frac{1}{in\omega}\left[\underbrace{f'(t)\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}}_{\text{anche } \cdot e^{-in\omega t}=0 \text{ perché } f' \text{ è } T\text{-periodica}}\right]_0^T + \frac{1}{(in\omega)^2}\int_0^T f''(t)\,e^{-in\omega t}\,dt$$

dunque $$c_n = -\frac{1}{n^2\omega^2}\int_0^T f''(t)\,e^{-in\omega t}\,dt$$

dato che f'' è continua $\left|\int_0^T f''(t)\,e^{-in\omega t}\,dt\right| \le \int_0^T |f''(t)|\,dt = C$

(↑ MODULO 1)

e quindi $|c_n| \le \frac{C}{n^2\omega^2}$ ← SOMMABILE

Per quanto detto sopra $\Rightarrow \sum c_n e_n$ è UNIF. CONV.

Per il teorema (1) questa serie converge puntualmente a f $\Rightarrow$

$\sum c_n e_n$ converge uniformemente a f

PROPRIETÀ ($\overline{z}$ = coniugato di z)

$\overline{a+ib} = a-ib$

Supponiamo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad \overline{f}=f$. Allora

$$\overline{c_n} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-int}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)\,e^{-in\omega t}} =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)}\;\overline{e^{-in\omega t}}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{in\omega t} = c_{-n}$$

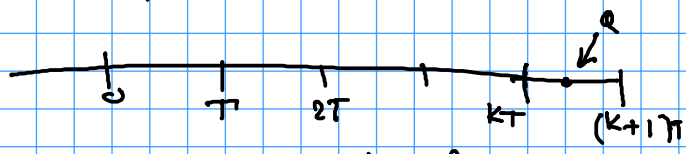
① f È REALE $\Leftrightarrow$ $\overline{c_n} = c_{-n}$ $\quad\Leftarrow$ NON L'HO DIM. MA È VERO

② I c_k li posso anche calcolare:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,e^{-in\omega t}\,dt \qquad \forall\, a\in\mathbb{R}$$

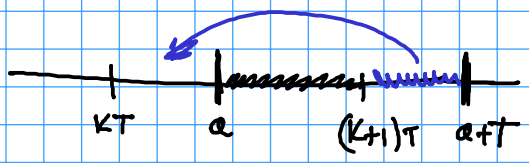
Infatti : chiamo $g(t) = f(t)e^{-in\omega t}$ ← T periodico

Suppongo che $KT \le a < (K+1)T$



$$\int_a^{a+T} g(t)\,dt = \int_a^{(K+1)T} g(t)\,dt + \int_{(K+1)T}^{a+T} g(t) =$$

Nel secondo integrale $t = s+T$



$$\int_a^{(K+1)T} g(t)\,dt + \int_{KT}^{a} \underbrace{g(s+T)}_{g(s)}\,ds = \int_{KT}^{(K+1)T} g(t)\,dt = \textcircled{*}$$

Con un altro cambio di variabile $t = s + KT$ →

$$\textcircled{*} = \int_0^T g(s+KT)\,ds = \int_0^T g(s)\,ds$$

Supponiamo f PARI (DISPARI)

$$c_{-K} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{in\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{-in\omega t}$$

faccio un cambio di variabile $s = -t$ →

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(-s)\,e^{-in\omega s}\,ds \quad \begin{cases} \nearrow & c_K \quad \text{se } f \text{ pari} \\ \searrow & -c_K \quad \text{se } f \text{ dispari} \end{cases}$$

f PARI	$\Leftrightarrow$	$c_{-K} = c_K$
f DISPARI	$\Leftrightarrow$	$c_{-K} = -c_K$

(NON HO DIMOSTR. LA $\Leftarrow$)

IN PARTICOLARE

f REALE PARI	$\Leftrightarrow$	c_K è REALE PARI
f REALE DISPARI	$\Leftrightarrow$	c_K è IMMAGINARIO PURO DISPARI

Infatti se f è reale pari $\overline{c_K} = c_{-K} = c_K$

se f è reale dispari $\overline{c_k} = c_{-k} = -c_k$

VEDIAMO COME SI SCRIVE LA SERIE DI F. nel caso f reale

Supponiamo dunque $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T- periodica

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{in\omega t} + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{-n} e^{-in\omega t} + c_n e^{in\omega t} \right) + c_0 \overset{f \text{ è reale}}{\downarrow} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\overline{c_n} e^{\overline{in\omega t}} + c_n e^{in\omega t} \right)$$

$$= \boxed{c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(c_n e^{in\omega t} \right)}$$

c_0 DEVE ESSERE REALE PERCHÉ $c_{-0} = c_0$

Sia $c_n = a_n - i b_n$ $\forall$. Allora la serie diventa

$$a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(a_n - i b_n \right)\left(\cos(n\omega t) + i \sin(n\omega t) \right) =$$

$$a_0 + 2 \sum \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)$$

Ricordiamo anche che

$$a_n - i b_n = c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\left(\cos(n\omega t) - i \sin(n\omega t) \right) =$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) - \frac{i}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)$$

DUNQUE HO TROVATO LA SERIE (INGLOBO IL 2 ...)

$$\boxed{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad \text{dove}}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \qquad \text{e se } n \geq 1$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t) \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)$$

DUNQUE se f è reale ed è C^1 a tratti $\Rightarrow$

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

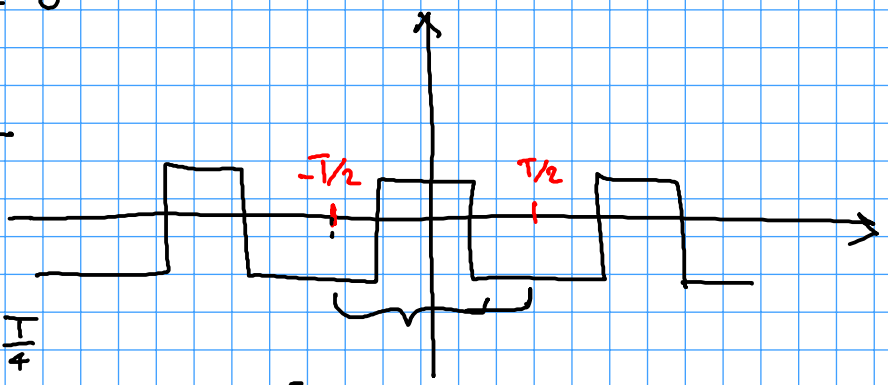
e la cosa è vera se f è C^1

f PARI $\Leftrightarrow$ $b_n = 0$

f DISPARI $\Leftrightarrow$ $a_n = 0$

VEDIAMO DEGLI ESEMPI

(1) ONDA QUADRA



$$f(t) = \begin{cases} 1 & \frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ -1 & -\frac{T}{2} < t < -\frac{T}{4} \text{ e } \frac{T}{4} < t < \frac{T}{2} \end{cases} \quad \text{in } \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$$

e definita per periodicità fuori da $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

(nei punti di salto la posso definire zero)

Per il Teorema (1) $\Rightarrow$ la serie converge puntualmente a f (anche nei punti di salto se in quei punti ho definito $f = 0$)

NOTA CHE f è PARI ($b_k = 0$) Calcolo i coeff di F.

Calcolo i c_n:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\, e^{-in\omega t} + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t} =$$

(cambio t in $-t$ nel I° integrale)

$$\frac{1}{T}\int_0^{T/2} f(t)\left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}\right) = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t) =$$

(lo sapevo già ...)

$$\frac{2}{T}\int_0^{T/4}\cos(n\omega t)\,dt - \frac{2}{T}\int_{T/4}^{T/2}\cos(n\omega t)\,dt =$$

$$\frac{2}{T}\left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{T/4} - \frac{2}{T}\left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_{T/4}^{T/2} =$$

$$-0 + \frac{2}{T n\omega}\sin\left(\frac{n\omega T}{4}\right) + \frac{2}{T n\omega}\sin\left(\frac{n\omega T}{4}\right) - \frac{2}{T n\omega}\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right) =$$

$$\frac{4}{2\pi n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{2\pi n}\sin(n\pi) \qquad \text{NOTA: } \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0,1,0,-1,0,1,\ldots$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 2k \\ (-1)^k & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ PARI} \\ \frac{2}{(2k+1)\pi}(-1)^k & \text{se } n = 2k+1 \ (\text{DISPARI}) \end{cases}$$

(il caso $n=0$ andava fatto a parte - conviene $a_0 = 0$)

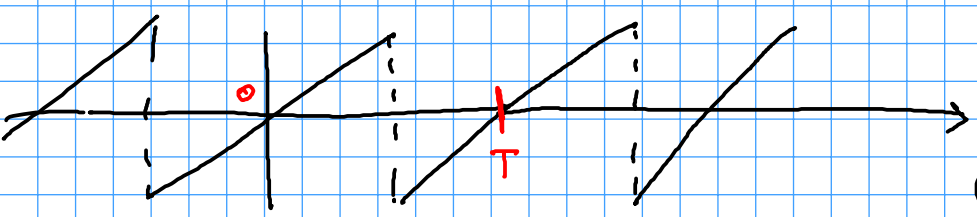
DUNQUE

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}\cos\left((2k+1)\omega t\right) \qquad \text{(puntualmente)}$$

Se metto $t = 0$ TROVO $\quad 1 = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ cioè

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2}$$

ESEMPIO 2 (DENTE DI SEGA)



$f(t) = t \quad \text{se} \quad |t| < \frac{T}{2}$

(e poi T- periodico)

(f è dispari $\Rightarrow \quad a_n = 0 \quad c_n = -2i\,b_n$)

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} t\, e^{-ik\omega t}\, dt = \text{(per parti)}$$

$$\frac{1}{T}\left[\frac{t\, e^{-ik\omega t}}{-ik\omega}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{T}\frac{1}{ik\omega}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-ik\omega t}\, dt$$

$\int_{-T/2}^{T/2} e^{ik\omega t}\, dt = 0$ ho integrale nullo su un periodo

$$= \frac{1}{T}\frac{i}{k\omega}\left(\frac{T}{2}e^{-ik\omega\frac{T}{2}} + \frac{T}{2}e^{ik\omega\frac{T}{2}}\right) \qquad (\omega T = 2\pi)$$

$$= \frac{i}{2k\omega}\left(e^{-ik\pi} + e^{ik\pi}\right) = \frac{(-1)^k}{k\omega}$$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{\omega k} \quad \text{è IMMAGINARIO PURO DISPARI !!}$$

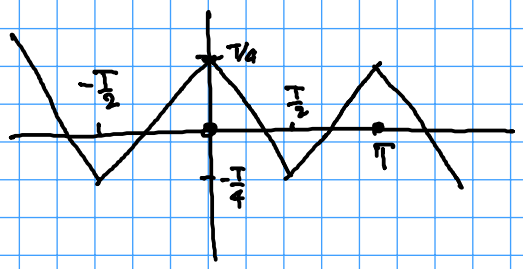
$$\Rightarrow b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n) = -\frac{2(-1)^n}{\omega n}. \quad \text{Alternativamente}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t\,\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\frac{t\cos(n\omega t)}{-n\omega}\right]_{-T/2}^{T/2} + \frac{2}{Tn\omega}\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}\cos n(\omega t)\,dt}_{=0} =$$

$$-\frac{2}{T}\frac{1}{n\omega}\cdot 2\,\frac{T}{2}\cos\left(n\omega\frac{T}{2}\right) = -\frac{2}{n\omega}\cos(n\pi) = -\frac{2(-1)^n}{n\omega}$$

OSSERVIAMO CHE In entrambi i casi $c_n \simeq \frac{1}{n}$ ← NON SONO SOMMABILI TORNA col fatto che se f NON SONO CONTINUE !

ESEMPIO 3 (ONDA TRIANGOLARE)



$$f(t) = \frac{T}{4} - |t| \quad \text{per} \quad |t| \le \frac{T}{2}$$

$$f(t) = \begin{cases} = \frac{T}{4} - t & \text{se } 0 \le t \le T/2 \\ = \frac{T}{4} + t & \text{se } -\frac{T}{2} \le t \le 0 \end{cases}$$

f è PARI (CONTINUA..) $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = 0$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\left(\frac{T}{4}-t\right)dt = \dots = 0$$

$\forall\ n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\left(\frac{T}{4}-t\right)\cos(n\omega t) =$$

↑ f pari

per parti — NON DIVIDO $\frac{T}{4}$ e t —

$$\underbrace{\frac{4}{T}\left[\left(\frac{T}{4}-t\right)\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{T/2}}_{\text{FA ZERO perché } \sin(0)=0 \text{ e } \sin(n\pi)=0} - \frac{4}{T}\frac{1}{n\omega}\int_0^{T/2}(-1)\sin(n\omega t)\,dt =$$

$$\frac{4}{T n\omega}\left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{T/2} =$$

$$\frac{4}{T n^2\omega^2}\left(-\cos(n\pi)+1\right) = \frac{1-(-1)^n}{n^2}\,\frac{4T}{4\pi^2 n^2}$$

$$= \frac{T}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \\ \frac{2T}{\pi^2 n^2} & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

DUNQUE

$$f(t) = \frac{2T}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)\omega t)$$

↑ SOMMABILE ⇒ HO LA CONV. UNIFORME !!

Se metto $t=0$ trovo

$$\frac{T}{4} = \frac{2T}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \iff \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$