Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 46 09/4/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Esempi (eq. diff. risolte "per serie")

$x y'' - y' - y = x$ ← come quelle dell'altra volta solo che il termine noto è x e non zero

LINEARE, NON OMOGENEA (non ha coeff. costanti – non è in forma normale)

CERCO la sol. $y(x)$ come serie di potenze: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Se y è di questo tipo (e se il raggio di conv. è > 0) posso derivare per serie:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} \quad (n=2)$$

RISCALANDO GLI INDICI $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$

$$x\, y''(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n\, a_{n+1} x^{n-1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n\, a_{n+1} x^n \quad (n=1)$$

SE IMPONGO CHE VALGA L'EQUAZIONE TROVO

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)n\, a_{n+1} - (n+1)a_{n+1} - a_n \right) x^n = x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n^2-1)a_{n+1} - a_n \right) x^n = x$$

← SE VOGLIO CHE VALGA

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow$

$a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$

$$\Updownarrow$$

$$(n^2-1)a_{n+1} - a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

$$(n^2-1)a_{n+1} = a_n + \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

SE $n=1$ TROVO $\boxed{a_1 = -1}$ NE SEGUE

SE $n=0$ $-a_1 = a_0 \iff \boxed{a_0 = 1}$

a_0 e a_1 SONO "BLOCCATI"

qualunque soluzione deve avere $y(0) = 1$ $y'(0) = -1$

$y(0) \uparrow a_0$ $\quad y'(0) \uparrow a_1$

SE $n \geq 2$ POSSO SCRIVERE

(R) $$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n^2-1)} \qquad \forall n \geq 2$$

← a_2 è libero

Se fisso $a_2 \Rightarrow a_n$ è determinato $\forall n \geq 3$

PER ESEMPIO PRENDO $\boxed{a_2 = 1}$ $\Rightarrow$ GLI a_n sono tutti determinati

Ad esempio $a_3 = \frac{a_2}{4-1} = \frac{a_2}{3} = \frac{1}{3}$

$a_4 = \frac{a_3}{9-1} = \frac{a_3}{8} = \frac{1}{24}$

$a_5 = \frac{a_4}{16-1} = \frac{a_4}{15} = \frac{1}{24 \cdot 15}$ ...

Se chiamo $\hat{a}_n$ gli a_n con $a_2 = 1$ $(\hat{a}_2 = 1)$ allora la soluzione generica è $y(x) = 1 - x + \alpha \sum_{n=2}^{\infty} \hat{a}_n x^n$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

($\hat{a}_n$ sono definiti da $\hat{a}_{n+1} = \frac{\hat{a}_n}{n^2 - 1}$, $\hat{a}_1 = 1$) ← (R)

DUNQUE POSSO ASSEGNARE $y''(0)$ e trovare

$$y(x) = 1 - x + \frac{y''(0)}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \hat{a}_n x^n$$

TUTTO QUESTO SE IL RAGGIO DI CONV. DELLA SERIE CHE HO TROVATO È UN $R > 0$.

IL RAGGIO DI CONV. LO POSSO TROVARE FACENDO

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\hat{a}_{n+1}}{\hat{a}_n} \left(= \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\hat{a}_n} \right) \quad (\text{gli } \hat{a}_n > 0)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2 - 1} = 0 \Rightarrow R = +\infty \left(\text{LA } \sum_{n=2}^{\infty} \hat{a}_n x^n \text{ CONV. } \forall x \in \mathbb{R} \right)$$

DOMANDA SE PARTO DA $y''(0) = 5$ QUANTO FA $y^{(IV)}(0)$??

PER RISPONDERE BASTA USARE (R) : $a_{n+1} = \frac{a_n}{n^2 - 1}$

Se $y''(0) = 5 \iff a_2 = \frac{y''(0)}{2} = \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow a_4 = \frac{a_3}{8} = \frac{5}{48} = \frac{y^{(4)}(0)}{4!} = \frac{y^{(4)}(0)}{24}$$

DUNQUE $\boxed{y^{(4)}(0) = \frac{5}{2}}$

Esempio

$$x^2 y'' - 3y' - 6y = 6$$

COME PRIMA CERCO $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n$$

$$y''(x) = \sum_{\substack{n=0 \\ (n=1)}}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} \Rightarrow x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^n$$

TROVO $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-3(n+1)\, a_{n+1} + \left[(n-1)n - 6 \right] a_n \right) x^n = 6$

($-3y'$, $x^2 y''$, $-6y$)

$\Updownarrow$

$$-3(n+1)\, a_{n+1} + (n^2 - n - 6)\, a_n = \begin{cases} 6 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \geq 0 \end{cases}$$

SE $n=0$ VIENE $-3a_1 - 6a_0 = 6 \iff a_1 = -2(1 + a_0)$

Se $n \geq 1$ (R) $\quad a_{n+1} = \dfrac{n^2 - n - 6}{3(n+1)}\, a_n$

UNA VOLTA FISSATO a_0 ($= y(0)$) $\Rightarrow$ TUTTI GLI a_n SONO DETERMINATI

PERÒ DEVO ESSERE SICURO CHE $\bar{R} > 0$

Se faccio $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n^2 - n - 6}{3(n+1)} \to \infty$ NON TORNA $\bar{R} = 0$

PERÒ IL TERMINE $n^2 - n - 6$ (È UN POL. DI GRADO 2) HA RADICI $\dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{+1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

DUNQUE $a_4 = 0 \cdot a_3 = 0$ qualunque sia a_3

$\Rightarrow$ $a_n = 0 \quad \forall n \geq 4$ $\quad$ $y(x)$ È UN POLINOMIO DI GRADO 3 !!

(IL CRITERIO DEL RAPPORTO $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L \ldots$ NON FUNZIONA SE GLI $a_n = 0$)

DUNQUE POSSO CALCOLARE ESPLICITAMENTE $y(x)$

$a_0 = \alpha$ arbitrario $\qquad a_{n+1} = \frac{n^2 - n - 6}{3(n+1)} a_n \qquad n \geq 1$

$a_1 = -2(1+\alpha)$

$a_2 = \frac{1 - 1 - 6}{3 \cdot 2} a_1 = \frac{-6}{6} a_1 = 2(1+\alpha)$

$a_3 = \frac{4 - 2 - 6}{3 \cdot 3} a_2 = -\frac{4}{9} \cdot 2(1+\alpha) = -\frac{8}{9}(1+\alpha)$

$a_4 = a_5 = \ldots = 0$

$$y(x) = \alpha - 2(1+\alpha)x + 2(1+\alpha)x^2 - \frac{8}{9}(1+\alpha)x^3 = \alpha + (1+\alpha)\left(-2x + 2x^2 - \frac{8}{9}x^3\right)$$

Per esempio se $\alpha = -1 \Rightarrow y(x) = 1$

Se $\alpha = 0 \Rightarrow$ $\underline{y(x) = -2x + 2x^2 - \frac{8}{9}x^3}$

PER CURIOSITÀ FACCIO LA VERIFICA

$$\left(x^2 y'' - 3y' - 6y = 6 \right)$$

$y'(x) = -2 + 4x - \frac{8}{3}x^2$

$y''(x) = 4 - \frac{16}{3}x \qquad x^2 y''(x) = 4x^2 - \frac{16}{3}x^3$

$x^2 y'' - 3y' - 6y = 4x^2 - \frac{16}{3}x^3 + 6 - 12x + \frac{24}{3}x^2 + 12x - 12x^2 + \frac{16}{3}x^3$

$= 6 + 4x^2 + 8x^2 - 12x^2 = 6$ $\qquad$ TORNA

SERIE DI FOURIER

Mi metto in $\mathbb{C}$ (le formule son più trasparenti

FISSO $T > 0$ (PERIODO) e pongo $\omega := \frac{2\pi}{T}$

e considero $e_n(t) = e^{in\omega t}$ $\left(= \cos(n\omega t) + i \sin(n\omega t)\right)$

Ricordo che $|e^{ix}| = 1$ e che $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

CHIAMO "SERIE TRIGONOMETRICA COMPLESSA" UNA SERIE DEL TIPO

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e_{-n}$$

dove i c_n sono dei numeri complessi.

OSS. SI TRATTA ANCORA DI SERIE DI POTENZE DATO CHE

$$c_n e^{in\omega t} = c_n \left(e^{i\omega t}\right)^n = c_n z^n \quad \text{con } z = e^{i\omega t}$$

PERÒ A NOI INTERESSA COSA SUCCEDE SU $|z| = 1$

e tipicamente $\sqrt[n]{c_n} \to 1$

OSS Tutte le funzioni $e_n(t) = e^{in\omega t}$ sono T-periodiche

(ovvio e_n è $\frac{1}{n}$ periodica $\Rightarrow$ e_n è T periodica)

f T-periodica VUOL DIRE $f(t+T) = f(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$ ← SERIE TRIG.

LA CONVERGENZA (e le proprietà) DI QUESTE SERIE DIPENDE DALLA SOMMABILITÀ DEI c_n.

PROP. Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ $\Rightarrow$ la serie converge TOTALMENTE

e quindi ben def. DUNQUE

$$f(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$ è continua (e T-periodica)

DIM $\| c_n e_n \|_{\infty, \mathbb{R}} = \| c_n e_n \|_{\infty, [0,T]} = \max_{0 \le x \le T} |c_n e^{in\omega t}| = |c_n|$

PROP. Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|c_n| < +\infty$ $\left(\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty \text{ e quindi } \exists f(t) \right)$

Allora f è C^1, $f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n' = \sum c_n in\omega e^{in\omega t}$

e anche la serie delle derivate è totalmente convergente

DIM. MOSTRO CHE LA SERIE DELLE DERIVATE È TOT. CONV.

QUESTO DIPENDE DA

$$\| c_n e_n' \|_{\infty, [0,T]} = \max_{0 \le t \le T} |c_n in\omega e^{in\omega t}| = |c_n| n |\omega|$$

Dato che $\sum n|c_n| < \infty \Rightarrow$ TESI. ✠

IN GENERALE SE $\sum |c_n| n^k < +\infty \Rightarrow f$ è di classe C^k e le sue derivate fino alla k-esima si ottengono derivando per serie...

OSS. $(m, n \in \mathbb{Z})$

$$\int_0^T e_n(t) \overline{e_m(t)}\, dt = \int_0^T e^{in\omega t} e^{-im\omega t}\, dt =$$

$$\int_0^T e^{i(n-m)\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega} \right]_0^T \quad (\text{SE } n \neq m)$$

$$= \frac{1}{i(n-m)\omega} \left(e^{i(n-m)\omega T} - 1 \right) = \frac{1}{i(n-m)\omega} \left(e^{2\pi (n-m) i} - 1 \right) = 0$$

$(\text{se } n \neq m)$

SE $n = m$ TROVO $\int_0^T e^0\, dt = T$ DUNQUE

$$\int_0^T e_n \overline{e_m}\, dt = \begin{cases} T & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

CONSEGUENZA Supponiamo $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ e sia

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i n \omega t}$$ (che esiste, continua per quanto visto)

ALLORA $$\boxed{c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-i n \omega t}\, dt}$$

Dim. Preso $m \in \mathbb{Z}$. Dato che

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n \qquad \text{(UNIF.)}$$

$$f \cdot \overline{e_m} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n \overline{e_m}$$

INTEGRO TRA 0 E T

$$\int_0^T f \cdot \overline{e_m}\, dt = \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n \overline{e_m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_n \underbrace{\int_0^T e_n \overline{e_m}\, dt}_{\substack{0 \text{ se } n \neq m \\ T \text{ se } n = m}} = c_m T$$

(per la conv. unif.)

quindi $$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f \cdot \overline{e_m}\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i m \omega t}\, dt$$

Def. Data f T-periodica e integrabile su $[0,T]$ definisco i suoi **coefficienti di Fourier complessi** ponendo

$$c_n := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i n \omega t}\, dt$$

(esistono perché $|f|$ è integrabile e $|e^{-i n \omega t}| = 1 \Rightarrow |f(t) e^{-i n \omega t}| = |f(t)|$ integrabile)

DOMANDA SPONTANEA Se parto da f integrabile, definisco i c_n come sopra, POSSO DIRE CHE $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$??

NO - CI SONO FUNZIONI CONTINUE CHE NON SONO SOMMA DELLE LORO SERIE DI FOURIER - IN MOLTI PUNTI (per esempio sui RAZIONALI)

DOMANDA SUCCESSIVA IN CHE IPOTESI SU f posso dire di f che $f = \sum c_n e_n$ (e in che senso vale $=$)

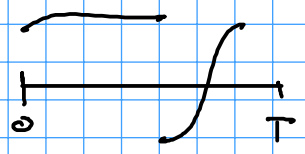
TEOREMA SUPPONGO che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, verifichi:

- f T-periodica
- $\exists\ t_0 < t_1 < \dots < t_k$ con $t_0 = 0$ $t_k = T$ tali che (NO CUSPIDI ↓) f è derivabile in ogni $]t_i, t_{i+1}[$ e f' è limitata in $]t_i, t_{i+1}[$

QUESTA IPOTESI IMPLICA CHE IN OGNI t_i esistono

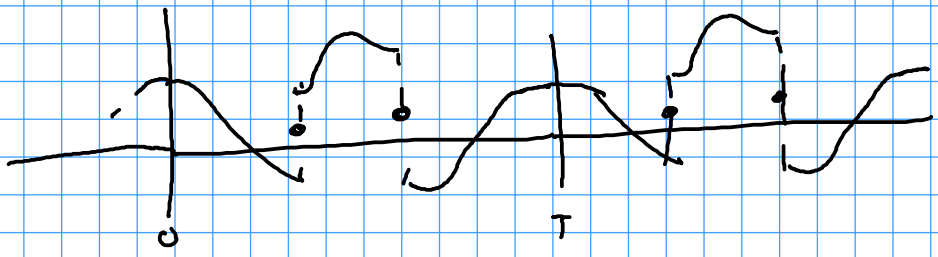
$$f(t_i^+) = \lim_{t \to t_i^+} f(t) \qquad f(t_i^-) = \lim_{t \to t_i^-} f(t)$$

(teorema tipo Hôpital)



ALLORA, se c_n sono i coeff di Fourier di f, si ha

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{(puntualmente)}$$

NOTA CHE SE $t \neq t_i$ allora $\dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = f(t)$

NO DIM