Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 45 28/3/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

VISTO IERI :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) \qquad \text{se } -1 < x < 1$$

mentre so che la serie converge anche in $x=-1$.

IN EFFETTI SI DIMOSTRA CHE LA FORMULA VALE ANCHE IN -1

Dimostro che la serie CONVERGE UNIFORMEMENTE IN $[-1,0]$

(mentre sto non so TOTALMENTE CONV. SU $[-1,0]$)

$$\sum \|g_n\|_\infty = \sum \frac{1}{n} = +\infty$$

Ricordo cosa si sa sulle serie $\sum_n (-1)^n a_n$

dove $a_n \geq 0$ decrescente ; Se chiamo $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$

vedo che $\{S_{2n}\}$ sono decrescenti, $\{S_{2n+1}\}$ crescenti

$S_{2n+1} \leq S_{2n} \Rightarrow \exists\, S = \lim_n S_n$ INOLTRE

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \Rightarrow \boxed{|S_n - S| \leq a_n}$$

INFATTI SE $n = 2k$ devo

$$0 \le S_{2k} - S \le S_{2k} - S_{2k+1} = a_{2k+1} = a_{n+1} \le a_n$$

SE $n = 2k+1$

$$0 \le S - S_{2k+1} \le S_{2k} - S_{2k+1} = a_{2k+1} = a_n$$

Considero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |x|^n}{n}$ $\quad -1 \le x \le 0$

So che converge e so per quanto detto sopra

$$\left| \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k |x|^k}{k}}_{S_n} - \underbrace{\sum \frac{(-1)^n |x|^n}{n}}_{S} \right| \le \frac{|x|^n}{n} \le \frac{1}{n}$$

$\forall\, x \in [-1, 0]$

IN ALTRI TERMINI $\quad \| S_n - S \|_{\infty, [-1,0]} \le \frac{1}{n} \to 0$

da cui la serie è unif. conv. $\Rightarrow$ IN PARTICOLARE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

L'ESEMPIO MOSTRA ANCHE CHE: CONV. UNIF. $\not\Rightarrow$ CONV. TOT.

Abbiamo visto che

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

COMMENTO Lo formula sopra prevede che ho definito la funzione esponenziale, ho dimostrato che $\frac{d}{dx} e^x = e^x$, e ho usato Taylor con resto di Lagrange.

POTREI NON SAPERE NIENTE DI e^x e considerare la serie

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Vedo che $\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 \Rightarrow \boxed{R = +\infty}$

Per fare il limite sopra conviene ricordare che

$$\text{Se } \frac{a_{n+1}}{a_n} \to L \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to L \qquad \text{(CESARO)}$$

e quindi fare $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = +\infty$

$\Rightarrow \sqrt[n]{n!} \to \infty$

DUNQUE $E(z)$ è definita $\forall z \in \mathbb{C}$

- Posso dimostrare (facilmente) che $\frac{d}{dx} E(x) = E(x)$ infatti so che $E(x)$ è derivabile e $\frac{d}{dx} E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!} =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = E(x)$$

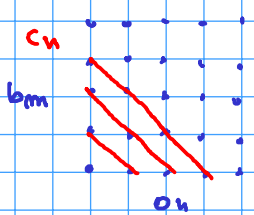
- Posso anche far vedere che $E(x+y) = E(x) \cdot E(y)$ (meno facilmente)

PER QUESTO USO QUESTO TEOREMA (sul prodotto alla Cauchy delle serie)

Date a_n e b_n t.c. $\sum |a_n| < +\infty$ $\sum |b_n| < +\infty$.

Definisco $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

ALLORA $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) \leftarrow \sim \sum_{n,m\in\mathbb{N}} a_n b_m$



USIAMO QUESTO TEOREMA SU $E(x)E(y) =$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = E(x+y)$$

$\binom{n}{k}$

BINOMIO DI NEWTON

- QUINDI $E(x+y) = E(x)\,E(y) \Rightarrow E(n) = E(1)^n$
- OVVIAMENTE $E(0) = 1$ $\qquad E(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(=: e\right)$

Potrei definire l'esponenziale in questo modo

IN QUESTO MODO HO AUTOMATICAMENTE DEFINITO L'ESPONENZIALE su $\mathbb{C}$. NOTIAMO CHE

$$E(x+iy) = E(x)\,E(iy)$$

$$E(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n \frac{y^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (i)^{2k} \frac{y^{2k}}{(2k)!} +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (i)^{2k+1} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}}_{\text{LA CHIAMO } \cos(y)} + i \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\text{LA CHIAMO } \sin(y)}$$

SONO FUNZIONI REALI

HO TROVATO LA FORMULA $e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$

NOTA CHE, CON LE DEF. FATTE SOPRA, posso DIM. (derivando per serie)

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x) \qquad \frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

e quindi $\frac{d^2}{dx^2} \cos(x) = -\cos(x) \qquad \frac{d^2}{dx^2} \sin(x) = -\sin(x)$

RISOLUZIONE "PER SERIE" DI EQ. DIFF.

ESEMPIO Consideriamo:

$$x y'' - y' - y = 0$$

II° ordine
← eq. lineare, omogenea ma ha un coeff. non costante, che si annulla in $x=0$ e moltiplica y''

NON È IN FORMA NORMALE $y'' + \dots = 0$

NON VALE IL TEOR. DI ESISTENZA VICINO A $x=0$

CERCO $y(x)$ del tipo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con (a_n) da determinare

Supponiamo per un momento che

(1) La serie $\sum a_n x^n$ abbia raggio di conv. $R > 0$

(2) La $y(x) = \sum a_n x^n$ risolva l'eq. su $]-R, R[$

Allora $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ ($m = n-1$)

$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \Rightarrow x y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n$ poiché $n=0$

Se deve valere l'equazione $\Rightarrow$

$$0 = x y'' - y' - y = \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1) n a_{n+1} - (n+1) a_{n+1} - a_n \right) x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)(n-1) a_{n+1} - a_n \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left((n^2-1) a_{n+1} - a_n \right) x^n$$

PERCHÉ TALE SERIE FACCIA ZERO BASTA CHE

(R) $\quad a_n = (n^2-1)\, a_{n+1} \quad \forall n \geq 0$

È UNA CONDIZIONE CHE SPERO MI INDIVIDUI GLI a_n

Nella (R) se metto $n=1$ TROVO $a_1 = 0$

Se poi metto $n=0$ $\Rightarrow$ $a_0 = -a_1 = 0$ $\Rightarrow$ $a_0 = 0$

SONO OBBLIGATO A PRENDERE $a_0 = a_1 = 0$

Se $n \geq 2$ in (R) posso scrivere

$$\boxed{\begin{array}{ll} a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n^2-1} & \forall n \geq 2 \\ a_0 = a_1 = 0 & a_2 \in \mathbb{R} \end{array}}$$

Posso scegliere ARBITRARIAMENTE a_2 e allora a_n è univocamente determinato $\forall n \geq 3$. Per esempio aggiungo la condizione

$\boxed{a_2 = 1}$ $\Rightarrow$ $y(x)$ è univocamente definita da (R)

OSSERVO CHE, se gli (a_n) sono definiti da (R) $\Rightarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n^2-1} \longrightarrow 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to 0 \Rightarrow \bar{R} = +\infty$$

$y(x)$ è definita $\forall x$ e verifica l'eq.

Le altre possibili sol di questa forma sono $\alpha\, y(x)$ $\alpha \in \mathbb{R}$

(prendo $a_2 = \alpha \in \mathbb{R}$)

VEDO DUNQUE CHE LE SOL DELL'EQ. HANNO TUTTE

$\underset{\substack{\shortparallel \\ a_0}}{y(0)} = \underset{\substack{\shortparallel \\ a_1}}{y'(0)} = 0$ $\quad$ NON POSSO ASSEGNARE $y(0)$ / $y'(0)$

Posso assegnare arbitrariamente $y''(0) = \dfrac{a_2}{2}$ (e basta!)

$$x y'' - y' - y = \begin{cases} 0 \\ x \end{cases}$$

$$x^2 y - 3y' - 6y = 6$$