Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 44 27/3/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

ESEMPIO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ è conv. tot. su $[-1,1]$

e ha raggio di conv. $\bar{R}=1$. Questo perché

$\max_{[-1,1]} \frac{|x|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$ sommabile. Perciò

$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$. IN QUESTO CASO POSSO ARRIVARE $[-\bar{R},\bar{R}]$

a differenza di quanto succede per $\sum x^n$

in cui $\bar{R}=1$ ma non ho conv. totale su $[-1,1]$

OSS. Mi potrei chiedere se c'è conv. unif su $]-1,1[$ nel caso di $\sum x^n$ - PIÙ IN GENERALE POTREI DOMANDARMI SE dato $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dato $\bar{R}>0$ raggio di conv.

SARÀ VERO CHE la serie conv. UNIF. su $]-\bar{R},\bar{R}[$

NON SEMPRE PER IL MOTIVO CHE SEGUE:

FATTO (senza dim.) A aperto Se $f_n : A \to \mathbb{R}$ sono tutte continue, $f: A \to \mathbb{R}$ (continua) $f_n \to f$ UNIF. su A ALLORA

(1) f si può estendere a $\bar{A}$ in modo continuo

(2) $f_n \to f$ unif. su $\bar{A}$

"Lo conv. unif. di funzioni continue PASSA alla chiusura"

QUESTO IMPLICA che

se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge UNIF. SU $]-\bar{R}, \bar{R}[\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ CONV. UNIF SU $[-\bar{R}, \bar{R}] \Rightarrow$

$\sum a_n x^n$ CONV. (PUNT.) su $[-\bar{R}, \bar{R}]$ ← FALSO NEL CASO DI $\sum_n x^n$

ALTRO ESEMPIO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ RAGGIO DI CONV. $\bar{R} = 1$

- se $x = 1$ la serie diverge. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty\right)$
- se $x = -1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ CONV. PER LEIBNIZ

DUNQUE LA SERIE CONV. per $x \in [-1, 1[$, ma non unif. (perché se la conv. fosse unif $\Rightarrow$ convergerebbe anche in 1)

POSSO CALCOLARE LA SOMMA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = F(x)$ $(\text{su }]-1, 1[)$

USANDO I TEOREMI DI DERIVAZIONE SOTTO IL SEGNO DI SERIE

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \Rightarrow F' = \sum_{1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n} = \sum_{1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$(\text{per } x \in]-1, 1[)$

$$\Rightarrow F(x) = F(0) + \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \left[-\ln(1-t)\right]_0^x = \ln\frac{1}{1-x}$$

$F(0) = 0$ (perché $n=0$ nella serie)

$-\ln(1-x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad \forall x \in]-1, 1[$$

NON È CHIARO COSA SUCCEDA SE $x = -1$. NON È DETTO CHE $F(x)$ SIA CONTINUA IN $x = -1$

SE AVESSI CONSIDERATO

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad \Rightarrow \quad R = 1 \quad (\text{e conv. tot. su } [-1,1])$$

Ragiono come sopra $\quad F' = \sum_{1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n^2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$.

$$x F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \qquad \text{QUINDI}$$

$$F'(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x) \qquad \text{da cui}$$

$$F(x) = \underbrace{F(0)}_{0} + \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt \quad \leftarrow \text{NON LO SO CALCOLARE}$$

HO COMUNQUE DIMOSTRATO

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt \qquad -1 \le x \le 1$$

E STREMI COMPRESI

l'integrando è continuo anche in $t=0$

Prendo -1

ESEMPIO $\quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = F(x)$ $\quad \leftarrow$ se c'è davvero "peggio di così"

(Raggio $=1$, agli estremi non converge)

PARTIAMO DA $\quad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (serie geometrica)

$-1 < x < 1$

$$G'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \quad \Rightarrow \quad x G'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

$$\frac{d}{dx}\left(x G'(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1} \quad \Rightarrow \quad x \frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx} G(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = F(x)$$

QUINDI $\quad F(x) = x \frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right) = x \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) =$

$$x \cdot \frac{(1-x)^2 - x \cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4} = \frac{x(1-x)}{(1-x)^3}\left(1 - x + 2x\right) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

DUNQUE $\quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

Def. Data $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ di classe C^∞, dico che f è

ANALITICA se $\forall x_0 \in]a,b[$ si ha $\exists \delta > 0$ per cui

$$\text{(*)} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \qquad \text{per tutte le } x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$$

IN SOSTANZA CHIEDO CHE f sia "localmente" somma della sua serie di Taylor.

IL CONTROESEMPIO DI IERI DICE che $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ è C^∞ MA NON È ANALITICA SU $\mathbb{R}$ - VICINO A ZERO la (*) non vale.

Fatto Se (a_n) succ. in $\mathbb{R}$ tale che $\sqrt[n]{|a_n|} \to \ell < +\infty$, diciamo

$R = \frac{1}{\ell} > 0$, posso DEFINIRE

$$F(x) = \sum a_n x^n \qquad \text{in }]-R, R[$$

ALLORA F è analitica in $]-R, R[$ (NON LO DIMOSTRO - NON È UNA COSA EVIDENTE: bisognerebbe mostrare che

$\forall x_0 \in]-R, R[$ posso scrivere

$$F(x) = \sum b_n (x-x_0)^n \qquad \text{in }]x_0-\delta, x_0+\delta[$$

PER ESEMPIO

$f(x) = e^x$ è analitica, anzi:

$$\boxed{e^x = \sum \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}} \qquad \text{(**)}$$

(allora e^x = somma della sua serie di Taylor in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$)

Usando Taylor con resto di Lagrange:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

dove $R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ con ξ tra 0 e x

$$e^{\xi}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad |R_n(x)| \le \frac{e^{|x|}\,|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leftarrow \text{tende a zero se } n \to \infty$$

VINCE $n!$ su $|x|^n$

QUINDI $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$R_{n+1}(x) \to 0$ se $n \to \infty$