Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 43 26/3/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

SERIE DI POTENZE

Conviene introdurre queste serie in $\mathbb{C}$ = {numeri complessi}

Def. Data (a_n) successione in $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ considero la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ dove

$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad f_n(z) = a_n (z-z_0)^n$ (dico che è una SERIE DI POTENZE)

PROBLEMA 1: INDIVIDUARE per quali z una serie di potenze converge

OSS. Posso per semplicità prendere $z_0 = 0$ (poi traslo ...)

DUNQUE LA SERIE È $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Def. Dato (a_n) chiamo RAGGIO DI CONVERGENZA della serie il seguente numero $0 \le R \le +\infty$:

$$l = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$ (nei casi concreti: $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$)

$l \in [0, +\infty]$

($\limsup d_n = \inf_{k\ge 0} \sup_{n\ge k} a_n$)

Definisco $\overline{R} = \frac{1}{\ell} = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell = +\infty \\ \frac{1}{\ell} & \text{se } \ell \in]0, +\infty[\\ +\infty & \text{se } \ell = 0 \end{cases}$

Teorema Data (a_n) si ha:

(1) La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \quad (f_n(z) = a_n z^n)$

è totalmente convergente sul disco $\{\|z\| \le R\}$, $\forall\ R < \overline{R}$

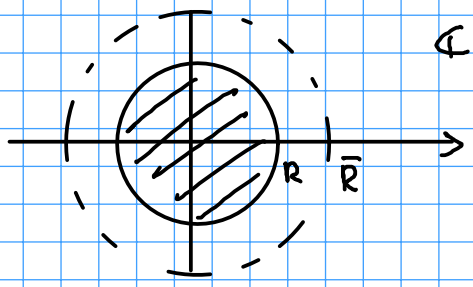
($\overline{R}$ = raggio di convergenza)

(2) La serie converge puntualmente su $\{\|z\| < \overline{R}\}$

(3) La serie non è puntualmente convergente sugli z t.c. $\|z\| > \overline{R}$

Nota: Non stiamo dicendo niente di cosa succede su $\{\|z\| = \overline{R}\}$

IN EFFETTI per questi punti non c'è un teorema generale e "dipende caso per caso"



Se $\overline{R} = +\infty$ vuol dire che ho conv. totale su tutti i $\{\|z\| \le R\}$

Con $R < +\infty$ e conv. puntuale su tutto $\mathbb{C}$

Dim. Si basa sul criterio della radice n-esima:

Se a_n è succ. di numeri ≥ 0 e se

$$(\max)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \quad (\text{CONVERGE})$$

Dimostro (1) Fisso $R < \overline{R}$. Se calcolo

$$\|f_n\|_\infty = \max_{\|z\| \le R} |a_n z^n| = |a_n| R^n$$

$\|f_n\|_\infty$: su $\overline{B_R} = \{\|z\| \le R\}$

$|a_n z^n|$: MODULO NEI COMPLESSI ($z \to \|(x,y)\|$ se $z = x + iy$)

Vediamo se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n$ ← FACCIAMO IL CRIT. DELLA RADICE

$\sqrt[n]{|a_n| R^n} = R \sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow R \cdot \ell$ (supponga che $\exists$ limite)

Se $R < \bar{R} \Rightarrow R \cdot \ell < \bar{R} \cdot \ell = \frac{1}{\ell} \cdot \ell = 1$ DUNQUE

$\sum \|f_n\|_\infty$ converge cioè la serie conv. TOTALMENTE su $\underbrace{\{\|z\| \le R\}}_{B_R}$

(2) è ovvio perché se $|z| < \bar{R}$, prendo $R = |z|$ e applico (1)

(3) Se $|z| > \bar{R}$ Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n z^n} = \lim_{n\to\infty} |z| \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \cdot \ell > 1$$

Questo implica che $|a_n z^n| \to \infty \Rightarrow a_n z^n$ non tende a 0.
e allora la serie NON CONVERGE

(se $\sqrt[n]{a_n} \to A > 1$ allora $a_n \simeq \left(A'\right)^n$ con $1 < A' < A$
$\Rightarrow a_n \to +\infty$)

Se c'è $z_0 \neq 0$ allora tutto si sposta sul disco $\{\|z - z_0\| \le R\}$
$\{\|z - z_0\| < \bar{R}\}$

ALLA FINE HO UNA FUNZIONE $F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

DEFINITA SU $B(z_0, \bar{R}) = \{z \in \mathbb{C} : \|z - z_0\| < \bar{R}\}$

(se $\bar{R} = 0$ non c'è nulla) ($F(z_0) = a_0$)

NOTA $F(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

quando uso la notazione $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ sottintendo $(z - z_0)^0 = 1$

$F(x)$ è "un polinomio di grado ∞"

ESEMPIO $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $\leftarrow a_n = 1 \ \forall n$

$\sqrt[n]{1} \to 1$ dunque $\bar{R} = 1$. Lo $G(z)$ è dunque definita su $B(0,1) = \{|z| < 1\}$ e non è definita su $\{|z| > 1\}$. NON È NEANCHE DEFINITA SU $\{|z| = 1\}$ per ché $1^n = 1$ dunque $z^n \not\to 0$ se $|z| = 1$

DI QUESTA G IN REALTÀ SO TUTTO PERCHÉ :

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \longrightarrow \frac{1}{1-z} \quad \text{se } |z| < 1$$

DUNQUE

$$G(z) = \sum_{0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{su } B(0,1)$$

SERIE GEOMETRICA

ESEMPIO $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ ← È UNA SERIE DI POTENZE PONENDO

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \overset{??}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

$1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 \ldots$

Per il raggio di conv. mi serve $\ell = \max \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

$$\left(|a_n| = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases} ; \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases} \right.$$

$\Rightarrow \bar{R} = \frac{1}{1} = 1$. ERA TUTTO OVVIO SE SI NOTAVA CHE

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{su } \{|z| < 1\}$$

NOTA CHE SE MI LIMITO A $z = x \in \mathbb{R}$ TROVO $\frac{1}{1+x^2}$

che è una funzione regolarissima su tutto $\mathbb{R}$

ma la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ CONVERGE A $\frac{1}{1+x^2}$ SOLO SU $]-1,1[$

PERCHÉ 1 ??

PERCHÉ IN $\mathbb{C}$ CI SONO I PUNTI $\pm i$ IN CUI $\frac{1}{1+z^2}$

NON È DEFINITA!

FATTO $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ è CONTINUA SU $B(z_0, \bar{R})$

per la conv. totale su ogni $B(z_0, R)$ $\quad R < \bar{R}$.

A QUESTO PUNTO LASCIAMO $\mathbb{C}$ e CONSIDERIAMO $a_n \in \mathbb{R}$

e $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\sum a_n (x-x_0)^n$ SERIE A VALORI REALI

IN QUESTA SITUAZIONE $F(x)$ è definita su $]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$

CERCHIAMO DI CAPIRE SE F è derivabile. NOTA

I singoli addendi $f_n(x) = a_n x^n$ sono derivabili e

$f_n'(x) = n a_n x^{n-1}$ $\Rightarrow$ LA serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \left(= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad \text{CAMBIO DI INDICE} \right)$$

$$\left(1 + x^2 + \underset{\uparrow a_5}{3} x^5 \right)' = 0 + x + \underset{\uparrow 5 a_5}{15} x^4$$

LA SERIE DELLE DERIVATE È ANCORA UNA SERIE DI POTENZE

IL RAGGIO DI CONV. DELLA NUOVA SERIE È (*) VEDI NOTA IN FONDO

$$1 \Big/ \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = 1 \Big/ \max\lim \sqrt[n]{n\,|a_n|}$$

(prop. dei limiti)

$$= 1 \Big/ \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \text{perché } \sqrt[n]{n} \to 1$$

DUNQUE IL RAGGIO DI CONV. DI $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$ È LO STESSO DI $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$\Rightarrow$ **TEOREMA** Se $\bar{R}$ = raggio di conv. di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\bar{R} > 0$

Allora la serie $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è derivabile in $]-\bar{R}, \bar{R}[$

e $F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$

Dim. Dal conto sopra risulta che, $\forall R < \bar{R}$, le serie

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ CONV. TOT. ($\Rightarrow$ UNIF.)

su $[-R, R]$. Per i Teoremi visti $\Rightarrow$ La seconda serie è la derivata della prima.

ITERANDO IL RAGIONAMENTO:

Se $\bar{R} > 0 \Rightarrow F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è infinitamente derivabile

su $]-\bar{R}, \bar{R}[$ e per ogni k intero

$$\text{(*)} \qquad \frac{d^k}{dx^k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n\, n(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k}$$

(e la serie scritta a destra ha lo stesso raggio di conv. $\bar{R}$)

OSSERVAZIONE Se metto $x=0$ in (*) e indico $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\frac{d^k}{dx^k} F(x)\Big|_{x=0} = F^{(k)}(0) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n\, n(n-1)\cdots(n-k+1)\, 0^{n-k}$$

($0^{n-k} = 0$ se $n > k$; $= 1$ se $n = k$)

$$= a_k\, k(k-1)\cdots 1 = a_k\, k!$$

CIOÈ $\boxed{\dfrac{F^{(k)}(0)}{k!} = a_k}$ $\forall k \geq 0$

(se fosse $\sum a_n (x-x_0)^n \Rightarrow a_n = \dfrac{F^{(n)}(x_0)}{n!}$)

RIASSUMENDO:

(1) Ho preso gli (a_n) (2) Ho costruito $F(x)$ a partire dagli (a_n)

(3) Ho scoperto che $F \in C^\infty$ (4) Ho trovato che gli a_n sono $\frac{F^{(n)}}{n!}$

GLI a_n SONO I COEFF. DI TAYLOR DI $F(x)$

(posso anche chiamare $\sum a_n x^n$ "SERIE DI TAYLOR")

Se F è una serie di potenze $\Rightarrow$ F coincide con la sua SERIE DI TAYLOR.

DOMANDA Se F è C^∞ e se chiamo $a_n = \frac{F^{(n)}}{n!}$ posso DIRE CHE $F(x) = \sum_n a_n x^n = \sum_n \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n$?? **NO**

CONTROESEMPIO $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$ $\quad f(0) = 0$

f è continua perché $\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$

Dico che f è C^∞. Infatti: se $x \neq 0$

$f(x) = e^{-x^2}$; $f'(x) = -(-2)x^{-3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \boxed{\frac{2 e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}}$

$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2 \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim_{t \to -\infty} -2 e^t |t|^{\frac{3}{2}} = 0$

$t = -\frac{1}{x^2}$ $\quad x^2 = -\frac{1}{t}$ $\quad x =$

perché e^{-t} è INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE A $|t|^{3/2}$

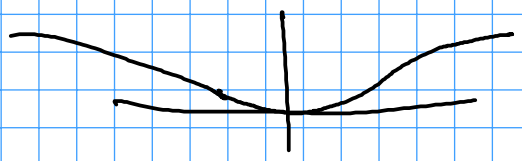
IN GENERALE SI DIMOSTRA CHE, $x \neq 0$

$f^{(k)}(x) = e^{-1/x^2} \frac{P(x)}{x^m}$ con P polinomio e $m \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$\lim_{x \to 0} f^{(k)}(x) = 0$ perché $e^{-\frac{1}{x^2}}$ "VINCE" su x^m

DUNQUE $\boxed{f^{(k)}(0) = 0}$ $\forall k$ $\quad f(x) = o(x^k)$ $\forall k$

IN ALTRI TERMINI $f(x)$ "si schiocca a zero" più rapidamente di qualunque potenza



Allora la serie di Taylor costruita a partire da f ha tutti $a_n = 0$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 \quad \forall n \implies \text{la serie di Taylor è } \underline{\underline{\text{NULLA}}}$$

MA, se $x \neq 0$, $F(x) > 0$ mentre la serie è zero

QUINDI $F(x)$ NON È SOMMA DELLA SUA SERIE DI TAYLOR ($x \neq 0$)

F è C^∞ MA NON È (SOMMA DI) UNA SERIE DI POTENZE

ESEMPIO $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ ← SERIE DI POTENZE. RAGGIO È

$$\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n(n-1)} = 1$$

LA SERIE CONV. SU $]-1, 1[$, (TOTALMENTE SU $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $\forall \varepsilon > 0$) (per quanto detto)

IN REALTÀ HO CONV. TOTALE SU $[-1, 1]$ (IN QUESTO CASO PARTICOLARE)

Perché $\max_{-1 \le x \le 1} \frac{x^n}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}$ ← SOMMABILE (ed è continuo su $[-1,1]$)

USANDO I RISULTATI VISTI SOPRA (e qualche trucco) RIESCO A TROVARE LA SOMMA DELLA SERIE ($\sim$)

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} \qquad F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n(n-1)}$$

LO FINIAMO DOMANI

IN (*) HO USATO $\sqrt[n]{a_{n+1}} = \left(\sqrt[n+1]{a_{n+1}} \right)^{\frac{n}{n+1}}$, dove $\frac{n}{n+1} \to 1$ e $l^1 = l$