Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 42 21/3/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Esempi di serie di funzioni

$\sum_n \frac{x}{x^2+n^2}$ $\qquad f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$ $\qquad$ su $A = [0, +\infty[$

(1) Convergenza puntuale $\Leftrightarrow$ per quali x la serie (numerica) converge

R: $\forall x$ converge data da $\frac{x}{x^2+n^2} \le \frac{x}{n^2}$ che è sommabile

DUNQUE $F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$ è definita per ogni x

($F(x) = -F(-x)$ dunque basta guardare $x \ge 0$)

(2) F è continua ? Mi serve la conv. unif $\Leftarrow$ conv. totale

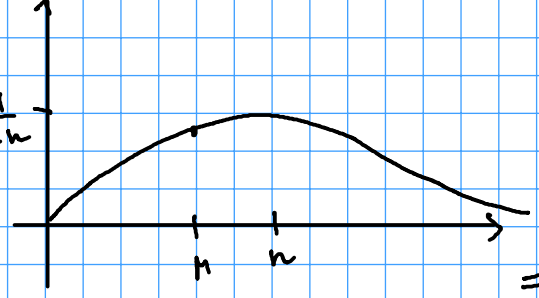
Per la conv. totale devo calcolare $\|f_n\| = \sup_{x \ge 0} |f_n(x)|$

Studio la funzione f_n su $x \ge 0$

$f_n(0) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f_n(x) = 0$; $f_n'(x) = \frac{x^2+n^2 - x(2x)}{(x^2+n^2)^2} = \frac{n^2 - x^2}{(x^2+n^2)^2}$

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm n$ ($x = -n$ non mi interessa)

$f_n(n) = \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2n}$



$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2n}$

NON È SOMMABILE

$\Rightarrow$ NO CONV. TOTALE su A

Dato che i punti di massimo $x = n$ si spostano all'infinito viene l'idea di restringersi a un insieme limitato.

Fisso $M > 0$ e prendo $A_M = [0, M]$ - Rifaccio tutto su A_M

$$\|f_n\|_{\infty, [0,M]} = \max_{0 \le x \le M} \frac{x}{x^2+n^2} = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{se } n \le M \\ \frac{M}{n^2+M^2} & \text{se } n > M \end{cases}$$

Stavolta $\sum_n \|f_n\|_{\infty, A_M} = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{2n} + \sum_{n>M} \frac{M}{n^2+M^2} < +\infty$ $\left(\frac{M}{n^2+M^2} \le \frac{M}{n^2} \right)$

φ NUMERO FINITO DI TERMINI

DUNQUE HO LA CONV. TOTALE (e quindi UNIFORME) su $[0, M] \Rightarrow$

$x \to F(x)$ è continua su $[0, M]$. Dato che M è arbitrario $\Rightarrow$ F è continua su tutto $[0, +\infty[$

F è derivabile? Di nuovo mi metto in $[0, M]$ e cerco di stimare $\|f_n'\|_{\infty, [0,M]}$: (se $0 \le x \le M$)

$$|f_n'(x)| = \frac{|n^2 - x^2|}{(n^2+x^2)^2} \le \frac{x^2+n^2}{(x^2+n^2)^2} = \frac{1}{x^2+n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

φ SOMMABILE

$\Rightarrow \sum_n \|f_n'\|_{\infty, A} < +\infty$ $\Rightarrow$ F' esiste $\forall x \in A$

INOLTRE $\sum_n f(x)$ conv. (PT.) su A e vale

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$$

NOTA Riesco a fare la convergenza totale della serie $\sum f_n'$ su TUTTO $[0,\infty[$

Posso quindi ricavare che $\lim_{x\to\infty} F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to\infty} f_n'(x) = 0$

TORNIAMO A F DOMANDA. C'è la conv. uniforme su tutto $[0,+\infty[$? SE LA RISPOSTA È SÌ $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$$

MA QUESTO NON È VERO. INFATTI prendiamo $m \in \mathbb{N}$

$$F(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n^2+m^2} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{m}{n^2+m^2} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{m}{m^2+m^2} =$$

$$\frac{m}{2m^2} \cdot \sum_{n=1}^{m} 1 = \frac{m}{2m^2} \cdot m = \frac{1}{2} \Rightarrow F(m) \geq \frac{1}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

NON È POSSIBILE CHE $F(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$ (NON C'È CONV. UNIF. SU $[0,+\infty[$)

NOTA CHE $f_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1/x}{n^2+1/x^2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2n^2+1} = \frac{x}{n^2x^2+1}$

quelle di ieri !! NE RICAVO $\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{x^3+n^3} \quad \text{su } [0,+\infty[$$

(1) Convergenza puntuale (per quali x la serie numerica converge $\rightarrow$ qual è il dominio di F)

R: TUTTE LE $x \geq 0$ dato che $|f_n(x)| = \frac{x}{x^3+n^3} \leq \frac{x}{n^3}$

$\ast$ sommabile

(2) Convergenza totale su $[0,+\infty[$ — Studio f_n

$f_n(0)=0$ " $f_n(\infty)=0$ "

$$f_n'(x)=\frac{x^3+n^3-x\,3x^2}{(x^3+n^3)^2}=\frac{n^3-2x^3}{(x^2+n^3)^2}\quad;\quad f_n'(x)=0 \text{ se } x=\frac{n}{\sqrt[3]{2}}$$

$$f_n\left(\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\frac{n}{\frac{n^3}{2}+n^3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}\frac{1}{n^2}\leftarrow \text{SOMMABILE !!}$$

DUNQUE HO CONV. TOTALE ($\Rightarrow$ UNIFORME) su tutto $[0,+\infty[$

NE SEGUE CHE

- $F(x)$ è continua su $[0,+\infty[$
- $\lim_{x\to+\infty} F(x)=0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{x^3+n^3}\quad\left(=:F(x)\right)\qquad \text{su } [0,+\infty[$$

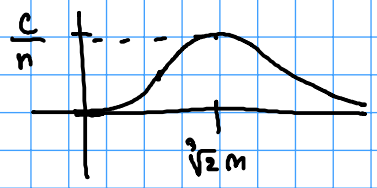
(1) Conv. puntuale $\forall x$ dato che $\frac{x^2}{x^3+n^3}\le\frac{x^2}{n^3}$ SOMMABILE

$F(x)$ è definita $\forall x\ge 0$

(2) CONV. TOTALE su $[0,+\infty[$ — Studio $f_n(x)$

$f_n(0)=0=f_n(+\infty)$

$$f_n'(x)=\frac{2x(x^3+n^3)-x^2(3x^2)}{(x^3+n^3)^2}=\frac{2n^3-x^3}{(x^3+n^3)^2}x$$



$f_n'(x)=0 \iff x=x_n:=\sqrt[3]{2}\,n$; $f_n(x_n)=\frac{\sqrt[3]{4}\,n^2}{n^3+2n^3}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\frac{1}{n}$

$x=0$ ($x=0$ è punto di minimo)

$\|f_n\|_\infty = C\frac{1}{n}$ NON È SOMMABILE $\Rightarrow$ NO CONV. TOTALE su $[0,+\infty[$

Se mi metto in $[0,M]$ ($M>0$ finito), vedo che

$$\|f_n\|_{\infty,[0,M]} = \begin{cases} \frac{c}{n} & \text{se } \sqrt[3]{2}\, n \le M \\ \frac{M^2}{n^3+M^3} & \text{se } \sqrt[3]{2}\, n > M \end{cases}$$

← SOMMABILE

Quindi $\forall M>0$ ho CONV. TOTALE SU $[0,M]$ $\Rightarrow$

F è continua su $[0,M]$; per l'arbitrarietà di M trovo che F è continua su $[0,+\infty[$

- VEDIAMO CHE NON PUÒ ESSERE $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$

($\Rightarrow$ NON C'È CONV. UNIF. SU $[0,+\infty[$)

FISSO $n \in \mathbb{N}$ e valuto $F(n)$

$$F(n) = \sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+n^3} \ge \sum_{1}^{n} \frac{n^2}{n^3+n^3} \ge \sum_{1}^{n} \frac{n^2}{n^3+n^3} = \frac{1}{2}$$

ALTRO ESERCIZIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^3+n^2} =: F(x)$$

(Dovrebbe venire F continua su $[0,+\infty[$
MA $\lim_{x\to\infty} F(x)$ NON È ZERO

per l'ultimo punto conviene valutare
$F(n^{\frac{2}{3}})$ con $n \in \mathbb{N}$)