Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 41 20/3/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

- Fatta alla lavagna per problemi tecnici

ARGOMENTI: Convergenza totale di una serie

- Proprietà di scambio di limiti (continuità, integrale, derivata) nelle ipotesi di convergenza uniforme, DUNQUE se c'è convergenza totale

- Esempio $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \qquad f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$

TUTTO QUANTO SCRITTO SOPRA SI TROVA NEL PARAGRAFO 5.2 (Serie di funzioni) delle note. Una parte è riassunta di seguito.

Esempi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ dove

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$$

$$f_n(x) = \frac{x}{n^3+x^3} \quad \text{su } \{x \geq 0\}$$

Def. Se $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ $\quad A \subset \mathbb{R}^N$ dico che $\sum_n f_n$ è **totalmente convergente** su A se

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in A} \| f_n(x) \|_{\mathbb{R}^M} < +\infty$$

cioè se

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \| f_n \|_{\infty, A} < +\infty$$

Teorema Se $\sum_n f_n$ è totalmente convergente $\Rightarrow$ è unif. convergente.

Dim (1) Provo di tutto dimostro che $\sum_n f_n(x)$ converge per ogni $x \in A$

Infatti $\forall x \in A \quad \| f_n(x) \| \le \| f_n \|_{\infty A}$ dunque dall'ipotesi

$$\forall x \in A \qquad \sum_n \| f_n(x) \| < +\infty$$

La serie (di vettori se $M > 1$, se no è una serie numerica) è "assolutamente" convergente. Ma allora la serie $\sum f_n(x)$ è convergente

(se $M = 1$ questo è noto da Analisi I, se $M > 1$ si può considerare ogni componente $(f_n)_i(x)$ e usare il fatto che $|(f_n)_i| \le \| f_n \| \dots$)

DUNQUE $\sum_n f_n(x)$ esiste per ogni $x \in A$

(2) Posto $F_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ e $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty}$ (che esiste per (1))

mostro che $F_n \to F$ unif. su A. Basta mostrare che

$$\| F_n - F \|_\infty \to 0 \iff \| \sum_{k=0}^{n} f_k - \sum_{k=0}^{\infty} f_k \|_\infty \to 0 \iff$$

$$\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \|_\infty \to 0 \quad (\text{per } n \to \infty).$$ Ma si ha:

$$0 \le \| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \|_\infty \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_\infty$$ e quest'ultima espressione tende a zero quando $n \to \infty$ proprio perché $\sum_{k=0}^{\infty} \| f_k \|_\infty < +\infty$!!