Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 40 19/3/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

CONVERGENZA DI UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI

Ricordiamo le definizioni

(f_n) successione di funzioni $\forall n$ è data $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$

- $f_n \to f$ PUNTUALMENTE SU A se $\forall x \in A \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
- $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE SU A se $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \|f(x) - f_n(x)\| =$

Se $f_n \overset{\text{UNIF.}}{\longrightarrow} f \Rightarrow f_n \overset{\text{PUNT.}}{\longrightarrow} f$

Teorema Se $f_n \overset{\text{UNIF.}}{\longrightarrow} f$ su A, e f_n sono tutte continue su A $\Rightarrow$ f è continua su A.

Dim. (Applico la def. di continuità). Sia $x_0 \in A$. Fisso $\varepsilon > 0$

(1) Per la conv. unif. $\exists\, \bar{n}$: $\forall \bar{n}$ $\sup_{x\in A} \|f_{\bar{n}}(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

(2) dato che $f_{\bar{n}}$ è continua $\exists$ U intorno di x_0 tale che $\forall x \in U$ $\|f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{3}$

(3) Allora se $x \in U$ si ha

$$\|f(x)-f(x_0)\| = \|f(x)-f_{\bar m}(x)+f_{\bar m}(x)-f_{\bar m}(x_0)+f_{\bar m}(x_0)-f(x_0)\| \le$$

$$\|f(x)-f_{\bar m}(x)\| + \|f_{\bar m}(x)-f_{\bar m}(x_0)\| + \|f_{\bar m}(x_0)-f(x_0)\| < \varepsilon$$

$< \frac{\varepsilon}{3}$ per la (1) $\quad \le \frac{\varepsilon}{3}$ per la (2) $\quad < \frac{\varepsilon}{3}$ per la (1)

Oss. Posso chiamare "norma uniforme" $\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} \|f(x)\|_m$

Si vede che:

(a) $\|f\|_\infty = 0 \iff f(x)=0 \ \forall x \in A$ cioè $f=0$ (f è la funzione nulla)

(b) $\|tf\|_\infty = |t|\,\|f\|_\infty$

(c) $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

} seguono dalle proprietà del sup.

DUNQUE la $\|\cdot\|_\infty$ ha le proprietà di una norma SE mi limito fra le funzioni LIMITATE (di modo che $\|f\|_\infty < +\infty$)

DUNQUE HO MESSO UNA NORMA (dunque una distanza) fra le funzioni limitate, per cui $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} f$ CORRISPONDE

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$ (nel senso della norma uniforme)

Se chiamo $B(A) = \{$funzioni limitate su $A\}$

$\Rightarrow B(A)$ è uno spazio vettoriale NORMATO

Se chiamo $C(A) = \{$funzioni continue e limitate$\}$

allora $C(A)$ è un sottospazio CHIUSO di $B(A)$

Se A è chiuso e limitato di $\mathbb{R}^N$ allora tutte le funzioni continue sono anche limitate e $\|f\|_\infty < +\infty \ \forall f \in C(A)$

DUNQUE CONV. UNIF. MANTIENE LA CONTINUITÀ ANZI

SI PUÒ DIRE UN PO' DI PIÙ

TEOREMA Se $f_n, f : \underset{\cap \mathbb{R}^N}{A} \to \mathbb{R}^M$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ di accumulazione per A

supponiamo che

(a) $\forall n \quad \exists \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \ell_n$

(b) $f_n \to f$ UNIF. SU A

TESI Allora esiste $\ell = \lim_{n \to \infty} \ell_n$ e si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

In altri termini si può fare lo "scambio di limiti"

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

Generalizza il caso precedente in cui $\ell_n = f_n(x_0)$ $\ell = f(x_0)$

NOTA x_0 può anche essere ∞

VEDIAMO ORA IL CONFRONTO TRA LA CONV. $f_n \to f$ e LE OPERAZIONI DI INTEGRALE E DERIVATA.

INTEGRALE

Teorema Supponiamo $f_n, f : A \xrightarrow{\text{UNIF.}} \mathbb{R}$; f_n continue (per semplicità) e supponiamo A limitato e chiuso ($\Leftrightarrow$ misurabile $< +\infty$)

Allora sono f_n che f sono integrabili su A. INOLTRE

$$\lim_{n \to \infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx$$

Dim.

$$\left| \int_A f_n(x)\,dx - \int_A f(x)\,dx \right| = \left| \int_A (f_n(x) - f(x))\,dx \right|$$

$$\leq \int_A |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_A \|f_n - f\|_\infty \,dx =$$

$$\text{mis}(A)\,\|f_n - f\|_\infty \to 0 \quad \text{per ipotesi} \qquad \#$$

IN REALTÀ si potrebbe usare il teorema di Lebesgue, ma in questo caso è più semplice la dim.

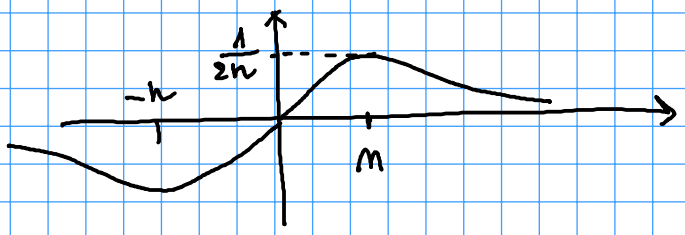
DUNQUE posso scambiare limite ed integrale:

$$\int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx$$

IL TEOREMA È FALSO SE A è illimitato !!

ESEMPIO $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$ $\qquad f_n(x)\to 0$ per $x\to\pm\infty$

Cerco $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = ?!$



$$f_n'(x) = \frac{(x^2+n^2) - 2x^2}{(n^2+x^2)^2} = \frac{(n^2-x^2)}{(n^2+x^2)^2} \quad ; \quad f_n'(x)=0 \iff x=\pm n$$

$$f_n(\pm n) = \pm\frac{1}{2n}$$

DUNQUE $\|f_n\| = \dfrac{1}{2n} \to 0$ cioè $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} 0$

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{n^2+x^2} = \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}$$

$$y=\frac{x}{n} \quad dy=\frac{dx}{n} = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{n y}{1+y^2}\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^2}\,dy = +\infty$$

L'ESEMPIO È VENUTO MALE - NON DICE NULLA

UN CONTROESEMPIO EFFETTIVO:

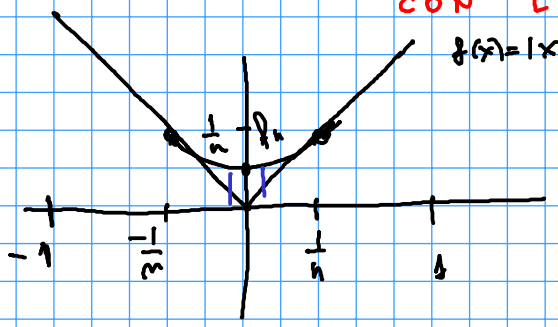
$\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n} \implies f_n$ tendono unif. a zero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n = \int_{-n-1}^{n+1} f_n \geq \int_{-n}^{n} f_n = 2 \quad \text{che non tende a zero}$$

IN QUESTO CASO NON VALE LO SCAMBIO TRA limite e integrale (perché A è illimitato)

DERIVATA

IN GENERALE LA CONV. UNIF. NON VA D'ACCORDO CON LA DERIVATA PER ESEMPIO



$f(x)=|x|$ NON È DERIVABILE IN $x=0$

PERÒ POSSO MODIFICARE f tra $-\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n}$, considerando la parabola $y=ax^2+b$ tale che:

$$a\left(\frac{1}{n}\right)^2+b=\frac{1}{n} \qquad \text{(} r \text{ "raccorda" con continuità con } f\text{)}$$

$$2a\left(\frac{1}{n}\right)=1$$

DUNQUE $a=\frac{n}{2}$ $\quad b=\frac{1}{n}-\frac{n}{2}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{n}$

CIOÈ considero $f_n(x)=$ $|x|$ fuori da $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$; $\frac{n}{2}x^2+\frac{1}{2n}$ se $x\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]$

$$\|f_n-f\|=\max_{0\le x\le\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{2}x^2+\frac{1}{n}-x\right)=\text{---}=\frac{1}{n}$$

DUNQUE $f_n\to f$ UNIF. f_n DERIVABILI MA f NON È DERIVAB.

LA CONV. UNIF. NON MANTIENE LA DERIVABILITÀ. PERÒ

Teorema $f_n, f: I\to\mathbb{R}$ I intervallo di $\mathbb{R}$. Supponiamo che f_n C^1 e che esista $g: I\to\mathbb{R}$ tale che

(1) $f_n'\to g$ uniformemente
(2) $f_n\to f$ puntualmente

$\Rightarrow$ f è derivabile e $f'=g$

(se f'_n tende (UNIF) a qualcosa $\Rightarrow$ $f'_n \to f'$)

Dim. Sia $x_0 \in I$ fissato. Allora

$$f' = g \iff f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \quad \forall x \in I$$

(TEOREMA FOND. CALCOLO INTEGRALE)

Se valgono le ipotesi del teorema so ho: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt$$

Tengo fisso x e PASSO AL LIMITE $n \to \infty$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

(conv. puntuale; uso la conv. unif $f'_n \to g$ (vedi teorema di prima))

Questo vuol dire $f' = g$!

IN DEFINITIVA

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

se questo limite esiste in senso unif.

PASSIAMO ALLE SERIE.

COSA E' UNA SERIE DI FUNZIONI ?

Def. Dato (f_n) succ. di funzioni da $A \subset \mathbb{R}^N$ a valori in $\mathbb{R}^M$ definisco le "somme parziali"

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

CHIAMO "SERIE DELLE f_n" la successione (S_n)

Posso dire che la serie delle f_n CONVERGE PUNTUALMENTE o UNIFORMEMENTE se le S_n convergono punt / unif.

Se così avviene possiamo considerare la "SOMMA della SERIE"

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ che è una funzione da A in $\mathbb{R}^m$

($S = \lim S_n$ in senso puntuale / unif.)

IN REALTÀ CON "SERIE" SI INTENDE SIA LA (S_n) sia la SOMMA (e con il simbolo $\sum f_n(x)$)

SAREBBE CORRETTO SCRIVERE $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ per indicare la funzione SOMMA DELLE f_n e $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ per indicare il VALORE di S in x.

Ad esempio $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ dove $f_n(x) = x^n$

f_n sono definite da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Per quali x la serie converge $\forall x$

LA CONVERGENZA DI QUESTA SERIE CORRISPONDE A CHIEDERSI

Se esiste (PUNTUALMENTE o UNIF.)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} x^k \right) = S(x) \qquad (S(x) \text{ da trovare})$$

IN QUESTO CASO IO CONOSCO L'ESPRESSIONE DELLE SOMME PARZIALI

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{se } x \neq 1$$

$$= n+1 \quad \text{se } x = 1$$

DUNQUE

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \longrightarrow \frac{1}{1-x} \quad \text{se} \quad |x| < 1$$

$$\longrightarrow +\infty \quad \text{se} \quad x \geq 1$$

NON HA LIM, se $x \leq -1$

CIOÈ SI HA CONVERGENZA PUNTUALE IN $]-1,1[$:

LA SERIE GEOMETRICA "$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$" CONVERGE PUNTUALMENTE IN $]-1,1[$

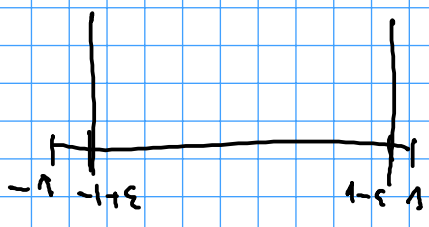
DICO che NON CONVERGE UNIF. SU $]-1,1[$. NON È POSSIBILE PER LA SEGUENTE PROPOSIZIONE.

Prop. Se $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono continue, $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ e $f_n \to f$ UNIF. SU $]a,b[$. ALLORA f si prolunga a $[a,b]$ e $f_n \to f$ unif su $[a,b]$ NON DIM.

Però Se prendo $\varepsilon > 0$ e mi metto :- $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon] =: I_\varepsilon$, allora serie converge unif. su I_ε . Per vederlo devo calcolare

$$\max_{|x|<1-\varepsilon} \left| \sum_{k=0}^{n} x^k - \frac{1}{1-x} \right| =$$

$$\max_{|x|<1-\varepsilon} \left| \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right|$$



$$\max_{|x|<1-\varepsilon} \frac{x^{n+1}}{|1-x|} = \frac{(1-\varepsilon)^{n+1}}{1-x} \longrightarrow 0 \text{ se } n \to \infty \text{, dato che } |1-\varepsilon| < 1$$

DUNQUE (S_n) non convergono UNIF. SU $]-1,1[$ ma convergono unif. su ogni $[a,b] \subset]-1,1[$.

DA QUANTO VISTO SULLE SUCC. DI FUNZIONI RICAVIAMO:

Teorema . Siano $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$. Allora.

(a) Se $\sum f_n$ converge unif. $\Rightarrow$ $\sum f_n$ converge puntualmente,

(b) Se $\sum f_n$ cons. unif e le f_n sono continue $\Rightarrow$

la somma della serie è una funzione continua

ORA $M = 1$.

(c) Se A è chiuso limitato, f_n continue, $\sum f_n$ CONV. UNIF ALLORA

$$\int_A \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f_n(x)\,dx$$

(d) $A = I$ intervallo di $\mathbb{R}$, $M = 1$. Se f_n sono C^1

se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ converge unif. e $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge punt.

$\Rightarrow$ la somma della serie è C^1 e vale

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

TUTTO QUESTO PROCEDIMENTO SULLA CONV. UNIF delle serie di apparentemente è complicato da dimostrare dato che dovrei guardare la somma parziale

IN REALTÀ POSSO EVITARE QUESTE DIFFICOLTÀ USANDO IL TEOREMA CHE SEGUE.

Teorema Siano $f_n : A \to \mathbb{R}^M$, A limitato e chiuso e f_n continue. Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty \quad \text{(serie di numeri positivi)}$$

dove $\|f_n\|_\infty = \max_{x \in A} \|f_n(x)\|$

ALLORA la serie delle f_n converge UNIF. su A