Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 38 13/3/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

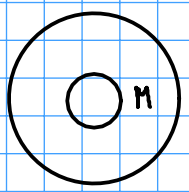
IL COMPITINO È CONFERMATO PER VENERDÌ 16 alle 15.00 aula A311

PRENOTARSI sul sito degli esami.

Svolgimento del compitino di esempio

I^a PARTE (1) $M = \{ 1 < x^2+y^2 < 4 \}$. ∂M è descritta da una curva chiusa regolare NO ce ne sono due

∂M è regolare SÌ



Direttamente: sono due circonferenze.

USANDO DINI $M = \{ g < 4 \} \cap \{ -g < -1 \}$

dove $g(x,y) = x^2+y^2$

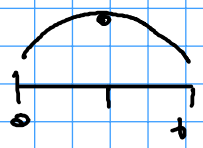
So che $\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ e $\nabla g(x,y) = 4$ oppure $g(x,y) = 1 \Rightarrow \nabla g \neq \vec{0}$

(e non ci sono punti in cui contemporaneamente $g=4$ e $-g=-1$

(2) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e $Q = [0,1] \times [0,1]$ allora il massimo è assunto in un punto $(x_0, y_0) \in \partial Q$ NO

(non è vero per tutte le funzioni come sopra): posso trovare una

che assume il massimo in un punto interno a Q (che allora è stazionario per f.)

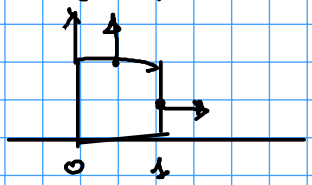
in una variabile 

$\left(x y (1-x)(1-y) \sim ? \right)$

NATURALMENTE CIÒ CHE VALE È:

- f HA MAX su Q, esiste in uno (o più punti) (x_0, y_0) (f continua, Q è limitato e chiuso
- Se $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{Q}$, e se f è differenziabile in $(x_0, y_0) \Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) = 0$
- Se $(x_0, y_0) \in \partial Q$, e f è diff. e se (x_0, y_0) NON È UN VERTICE

$\nabla f(x_0, y_0)$ è perpendicolare al lato a cui appartiene (x_0, y_0)



($\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g_i(x_0, y_0)$ dove $g_1 \dots g_4$ individuano i lati

$g_1(x,y) = -y$; $g_2(x,y) = x-1$; $g_3(x,y) = y-1$, $g_4(x,y) = -x$

$\overset{\circ}{Q} = \{ g_1 < 0 \} \cap \{ g_2 < 0 \} \cap \{ g_3 < 0 \} \cap \{ g_4 < 0 \}$ / $\overline{Q}$ = tutte ≤ 0

$\partial Q = \{ g_1 = 0, g_2 \leq 0, g_3 \leq 0, g_4 \leq 0 \} \cup \dots$

lato 1

Se $(x_0, y_0) \in$ lato 1 $\Rightarrow g_1(x_0, y_0) = 0$ e le altre sono ≤ 0

Se (x_0, y_0) NON È UN VERTICE $g_1(x_0, y_0) = 0$ e le altre < 0

$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e quindi dei moltiplicatori ho $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda \end{pmatrix}$

cioè $\nabla f(x_0, y_0)$ è $\perp$ al tratto 1

- Se (x_0, y_0) è un vertice non so dire (Lagrange mi dà se per esempio $g_1 = 0$ $g_2 = 0$ $g_3 < 0$ $g_4 < 0$, $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$

qualunque vettore di $\mathbb{R}^2$

(3) Calcolare $\max_{x^2+y^2=1} x+y$. Per il teorema dei moltiplicatori il massimo viene assunto in un punto (x_0, y_0):

$(f(x,y)=x+y,\ g(x,y)=x^2+y^2-1)$ $\quad \begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$ $\quad (i \sim (x_0,y_0))$

$$\begin{cases} 1 = \lambda\, 2x_0 \\ 1 = \lambda\, 2y_0 \\ x_0^2+y_0^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \lambda \neq 0 \quad x_0 = y_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \to f = \sqrt{2}$

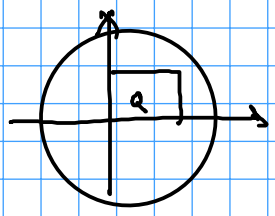
$-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \to f = -\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \max_{x^2+y^2=1} x+y = \boxed{\sqrt{2}}$$

(4) La funzione $f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ è integrabile su $\underbrace{[0,1]\times[0,1]}_{Q}$ $\boxed{SI}$

Abbiamo visto a lezione che f è integrabile su $B(0,R)$ $\forall R>0$

Se prendo $R=2 \Rightarrow \quad Q \subset B(0,2)$



Dato che $f \geq 0$ $\quad \iint_Q f \leq \int_{B(0,2)} f < +\infty$

(5) f int su $\mathbb{R}^N \Rightarrow |f|$ int. su $\mathbb{R}^N$ $\quad \boxed{SI}$ per definizione

(6) Ω aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ $\quad f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad C^1$. Scrivo $P \in \Omega$ $P=(x,y)$ con $y \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$

Poniamo $M = \{(x,y) \in \Omega : f(x,y)=0\}$

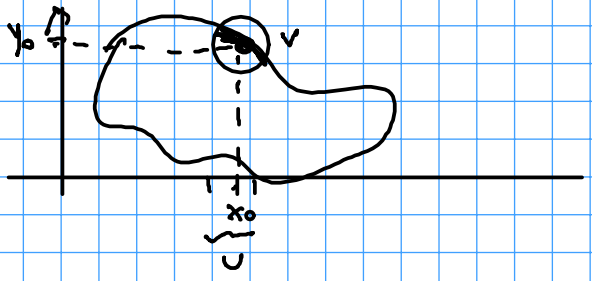
e supponiamo che $(x_0,y_0) \in M$ e $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

Allora esiste un intorno V di (x_0,y_0), un intorno U di x_0

e una funzione $f: U \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0) = y_0 \quad , \quad \text{se } x \in U \Rightarrow f(x,y) \in V$$

$$M \cap V = \{x, f(x) : x \in U\}$$



II^a Parte

① Considero $f(x,y) = x y^3$ $\quad M = \{ x^2 + y^2 \le 1 \}$

cerco max / min di f su M.

- ESISTONO **SÌ** per Weierstrass (M è chiuso e limitato)

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2$. CERCO i PUNTI CRITICI INTERNI A M

$\begin{cases} y^3 = 0 \\ xy^2 = 0 \end{cases} \iff y = 0$ tutti i punti con $y=0$ sono critici ($f(x,0) = 0 \quad \forall x$!!)

CERCO i PUNTI CRITICI VINCOLATI A $S = \partial M = \{ x^2 + y^2 = 1 \}$

USO i MOLTIPLICATORI:

$\begin{cases} y^3 = 2\lambda x \\ 3xy^2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

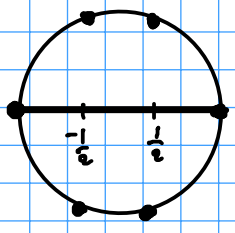
(· Se $\lambda = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$)

(· Se $\lambda \neq 0$) MOLTIPLICO LA I° RIGA PER y

Lo II° per $x \Rightarrow y^4 = 3x^2 y^2$

La condizione $y^4 = 3x^2 y^2 \iff \begin{cases} y = 0 \\ y^2 = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow$ METTO $y^2 = 3x^2$

nell'ultima equazione $x^2 + 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \qquad x = \pm \frac{1}{2} \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$



IN QUESTI PUNTI CALCOLO f e TROVO

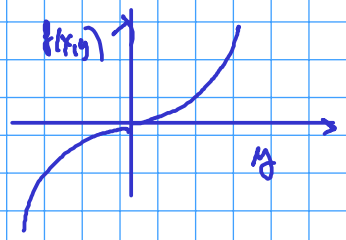
$f(x,0) = 0$

$f\left(\pm \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$ **MASSIMO**

$f\left(\pm \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = -\frac{3\sqrt{3}}{16}$ **MINIMO**

(Se cercassi a vedere i punti $(x,0)$ troverei che NON SONO NE' MAX / NE' MIN / NE PURE DI SELLA

FISSO x e guardo $f(x,y)$



(2) $M = \{ P \in \mathbb{R}^4 : \underbrace{2xyw^2 + y^2z^2 + 1 = 0}_{g_1(P)}, \underbrace{xy^3 - w^3 z = 0}_{g_2(P)} \}$

$g(P) = \begin{pmatrix} g_1(P) \\ g_2(P) \end{pmatrix}$ $\quad g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ $\quad P = (x, y, w, z)$

$M = \{ P \in \mathbb{R}^4 : g(P) = 0 \}$. $P_0 = (1, -1, -1, 1)$

$P_0 \in M$ (si vede..) . Voglio dire vicino a P_0 M sia grafico di una $f(x,y)$ cioè sia del tipo dei punti

$(x, y, w(x,y), z(x,y))$ con w, z definite in un intorno di $(1,-1)$ (con $w(1,-1) = -1$, $z(1,-1) = 1$)

Voglio usare Dini . Calcolo $\frac{\partial g}{\partial P}$ (matrice 2×4)

$$\frac{\partial g}{\partial P} = \begin{pmatrix} 2yw^2 & 2xw^2 + 2yz^2 & 4xyw & 2y^2 z \\ y^3 & 3xy^2 & -3w^2 z & -w^3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(P_0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial g}{\partial (x,y)}$ $\qquad$ $\frac{\partial g}{\partial (w,z)}$

$\det \frac{\partial g}{\partial (w,z)} = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = 4 + 6 = 10 \neq 0$ (2) TEOREMA

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial(x,y)}(1,-1) = -\left(\dfrac{\partial g}{\partial(w,z)}\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial g}{\partial(x,y)}\right) = -\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$

TUTTO IN P_0

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & +6 \\ 10 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{5} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{6}{5} \quad (\text{in } (1,-1))$$

---

(3) Calcolare

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2} \qquad \text{dove } D = \{x^2+y^2 \le 1\}$$

L'integrando è misurabile, ≥ 0. Passo in coordinate cilindriche

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\,d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\rho^2+z^2} = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^1 \frac{2\rho\,d\rho}{\rho^2+z^2} =$$

$$\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(\rho^2+z^2)\Big|_0^1 dz = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1+z^2) - \ln(z^2)\,dz =$$

$$\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{z^2}\right) dz < +\infty \quad \text{perché}$$

VIENE $2\pi^2$

Se $z \to +\infty$ $\quad \ln\left(1+\frac{1}{z^2}\right) \simeq \frac{1}{z^2}$ che è integrabile all'∞

mentre se $z \to -\infty$ $\quad \ln\left(1+\frac{1}{z^2}\right) \simeq \ln\left(\frac{1}{z^2}\right) = -2\ln(z)$

che è integrabile vicino a zero.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{z^2}\right) = 2\ln\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} z\,\frac{z^2}{z^2+1}\cdot\left(1+\frac{1}{z^2}\right)' =$$

$$\Big\| \quad 0$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^3}{1+z^2}\left(-2\,\frac{1}{z^3}\right) dz = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\pi.$$

PROVIAMO L'ALTRO VERSO:

$$\int_0^1 \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\rho^2+z^2} = \int_0^1 \rho \frac{d\rho}{\rho^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+\left(\frac{z}{\rho}\right)^2} = \int_0^1 d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$= 1 \cdot \left[\arctan t\right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

$t = \frac{z}{\rho} \quad dt = \frac{dz}{\rho}$

↑ TORNA (lo devo moltiplicare per 2π)

$$\iiint_B \frac{z}{x^2+y^2} = ?! \qquad B = \{x^2+y^2+z \le 1\}$$

VALE $+\infty$ se $x^2+y^2=0 \quad z>0$

VALE $-\infty$ se $x^2+y^2=0 \quad z<0$

VALE 0 se $x^2+y^2=0=z$

NON È A SEGNO COSTANTE. $-f(x,y,z) = f(x,y,-z)$

B è simmetrico: $(x,y,z) \in B \iff (x,y,-z) \in B \quad / \quad B^{+/-} = B \cap \{z \gtrless 0\}$

ALLORA se f è integrabile $\iiint_B f = 0$

$$\iiint_B f = \iiint_{B^+} f + \iiint_{B^-} f = \iiint_{B^+} f + \iiint_{B^+} -f = 0$$

(USO IL CAMBIO DI VAR. $(x,y,z) \to (x,y,-z)$

IL PROBLEMA DIVENTA: SAPERE SE

$$\iiint_B \frac{|z|}{x^2+y^2} < +\infty \iff 2\iiint_{B^+} \frac{z}{x^2+y^2} < +\infty$$

USO LE COORD SFERICHE

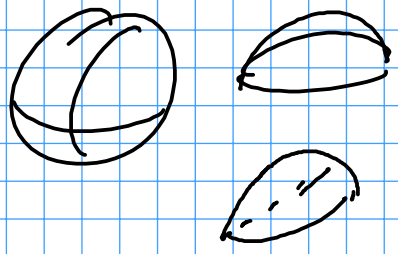
$$\iiint_{B^+} \frac{z}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^1 \frac{\cos\psi\,\rho}{\sin^2\psi\,\rho^2} \rho^2 \sin\psi\,d\rho =$$

$$2\pi \int_0^{\pi/2} \underbrace{\frac{\cos\psi}{\sin\psi}}_{+\infty} d\psi \int_0^1 \rho\, d\rho$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\psi}{\sin\psi}\, d\psi = \int_0^1 \frac{1}{t}\, dt = +\infty \qquad t = \sin\psi$$

DIVERGE !!

Proviamo $\iiint_B \frac{xz}{x^2+y^2}\, dx\,dy\,dz$



Se esiste è zero per le simmetrie

Per l'esistenza basta vedere

$$\iiint_D \frac{xz}{x^2+y^2}\, dx\,dy\,dz \qquad D = B \cap \{z \geq 0, x \geq 0\}$$

(per simmetria $\iiint_B \frac{|xz|}{x^2+y^2} \overset{?}{=} 4 \iiint_D$)

coord. sferiche

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^1 \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\psi \cos\psi}{\rho^2 \sin^2\psi}\, \rho^2 \sin\psi\, d\rho$$

$$= \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta}_{=2} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\psi\, d\psi}_{=1} \int_0^1 \rho^2\, d\rho = 2\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos\psi\, d\psi = \Big[\sin\psi\Big]_0^{\pi/2} = 1$$