Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 37 12/3/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Esercizio

$$M = \{ (x,y,w,z) \in \mathbb{R}^4 : \ 2xy + 3wz = 0, \ 3xz + 2yw = 0 \}$$

$P_0 = (2,3,2,-2)$

Nota che $P_0 \in M$: $2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 (-2) = 12 - 12 = 0$

$3 \cdot 2 (-2) + 2 \cdot 3 \cdot 2 = -12 + 12 = 0$

Facciamo vedere che, vicino a P_0, M è regolare di codimensione 2 (dim = 4 − 2 = 2) USANDO IL TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE

PONGO

$$g(x,y,w,z) = \begin{pmatrix} 2xy + 3wz \\ 3xz + 2yw \end{pmatrix} \qquad \left(M = \{ P : g(P) = 0 \} \right)$$

$\left(g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \right)$

$P_0 = (2,3,2,-2)$

$P = (x,y,w,z)$

Calcoliamo lo Jacobiano di g:

$$\frac{\partial g}{\partial P} = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 3z & 3w \\ 3z & 2w & 2y & 3x \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial P}(P_0) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -6 & 6 \\ -6 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Per dire che M è regolare vicino a P_0 mi basta che $\frac{\partial g}{\partial P}(P_0)$ abbia rango 2. In effetti il minore con le ultime due colonne

$\frac{\partial g}{\partial(wz)} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ ha determinante $-72 \Rightarrow$ è invertibile

Questo mi dice anche che "posso esplicitare" (w, z) in termini di (x, y)

DUNQUE $\exists\ w(x,y)$ e $z(x,y)$, definite in un intorno di $(2,3)$

tali che $w(2,3) = 2 \quad z(2,3) = -2$ e esiste un intorno U di P_0:

$$M \cap U = \{ (x, y, w(x,y), z(x,y)) : x, y \in \text{Intorno di } (2,3) \}$$

sempre per il Dini so che w, z sono C^1 e $f(x,y) = \begin{pmatrix} w(x,y) \\ z(x,y) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad Jf(x,y) = -\frac{\partial g}{\partial(wz)}(P)^{-1} \frac{\partial g}{\partial(xy)}(P) \qquad \text{con } P = (x, y, w(x,y), z(x,y))$$

in particolare $Jf(2,3) = -\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} =$

$$\frac{1}{-72}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \frac{6}{72}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x}(2,3) = -1 \qquad \frac{\partial w}{\partial y}(2,3) = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(2,3) = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{3}$$

NOTA $\frac{\partial g}{\partial P}(P_0) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -6 & 6 \\ -6 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & & 4 & \end{pmatrix}$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial(yz)} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \leftarrow \det = 0$

NON VALGONO LE IPOTESI. SI VEDE CON I CALCOLI CHE NON POSSO ESPLICITARE (y, z) in termini di (x, w). Infatti

$$\begin{cases} 2xy + 3wz = 0 \\ 3xz + 2yw = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{3wz}{2x} \\ 3xz - \frac{3w^2 z}{x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{3wz}{2x} \\ z = 0 \quad \text{oppure} \quad 3x^2 = 3w^2 \end{cases}$$

NON RIESCO A RICAVARE z !!!

Esercizio $\quad M = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{xy} = x + z,\ e^{xz} + y = 0 \}$

$P_0 = (0, -1, 1)$.

$P_0 \in M$ infatti $e^{0\cdot(-1)} = 0 + 1$ ok ; $e^{0\cdot 1} - 1 = 0$ ok

Prendo $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{xy} - x - z \\ e^{xz} + y \end{pmatrix}$ $\quad (M = \{P \in \mathbb{R}^3 : g(P) = 0\})$

Calcolo $\dfrac{\partial g}{\partial P} = \begin{pmatrix} y e^{xy} - 1 & , & x e^{xy} & , & -1 \\ z e^{xz} & , & 1 & , & x e^{xz} \end{pmatrix}$

e in $P_0 \to$ $\dfrac{\partial g}{\partial P}(P_0) = \begin{pmatrix} -2 & , & 0 & , & -1 \\ 1 & , & 1 & , & 0 \end{pmatrix}$

HA RANGO 2 e tutti i minori 2x2 sono invertibili.

Posso per esempio esplicitare y e z in termini di x:

esistono $y(x)$ e $z(x)$ definite in $[-\delta, \delta]$ con $\delta > 0$, di classe C^1, tali che $y(0) = -1$, $z(0) = 1$ e

vicino a P_0 M è descritto dai punti $(x, y(x), z(x))$ $(|x| < \delta)$

, cioè M è "sostegno" di una curva $\gamma(x) = (x, \underbrace{y(x), z(x)}_{g(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}})$

Inoltre

$$\frac{d}{dx} g(0) = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

cioè $y'(0) = -1$, $z'(0) = -2$

POSSO DIRE ANCHE CHE M è un vincolo regolare di codimensione 2 (di dim. 1) Perché $\forall P \in M$ $\dfrac{\partial g}{\partial P}(P)$ ha rango 2

Infatti

$$\frac{\partial g}{\partial P} = \begin{pmatrix} y e^{xy} - 1 & , & x e^{xy} & , & -1 \\ z e^{xz} & , & 1 & , & x e^{xz} \end{pmatrix}$$

Calcolo $\det\left(\dfrac{\partial g}{\partial (yz)}\right) = x^2 e^{x(y+z)} + 1 \geq 1 > 0$

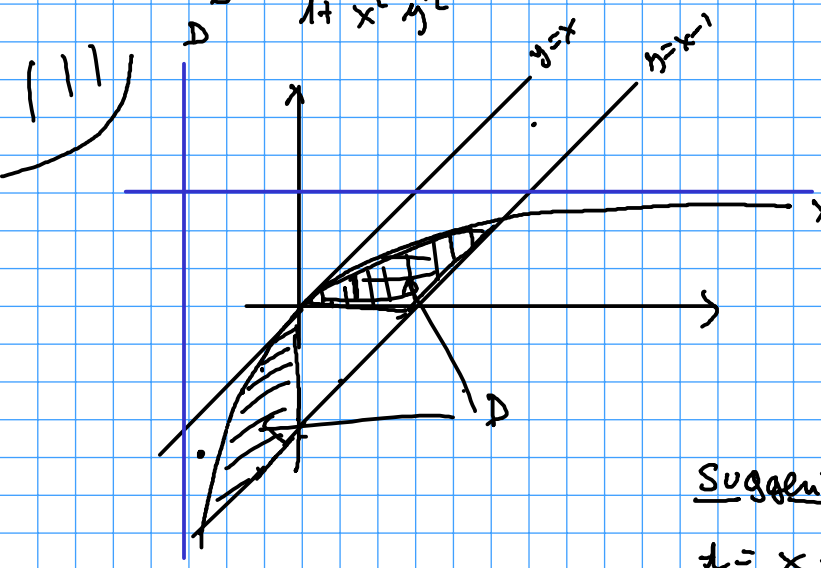
Dunque PER OGNI PUNTO $(x_0, y_0, z_0) \in M$ posso esplicitare

(y, z) in termini di x [vicino a (x_0, y_0, z_0)]

ESERCIZIO Calcolare

$$\iint_D \frac{|x^2 - y^2|}{1 + x^2 y^2}$$

dove $D = \{(x,y) : 0 \le x - y \le 1,\ 0 < xy \le x - y\}$



$x - 1 \le y \le x$

$xy \le x - y$?!

$(x+1)y \le x$ $\quad y \le \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

se $x + 1 \ge 0$

Suggerimento: usare la sostituzione

$t = x - y \qquad w = xy$

cioè uso $\begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ xy \end{pmatrix}$. Mi serve $\det J_\phi =$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix} = x + y$$

$\phi : D \to D_1$ dove $D_1 = \{0 \le t \le 1,\ 0 \le w \le t\}$

Vediamo come cambia l'integrale:

$$\iint_D \frac{|(x-y)(x+y)|}{1 + x^2 y^2}\, dx\,dy = \iint_{D_1} \frac{t}{1 + w^2}\, dt\, dw = \circledast$$

(formalmente $|x + y|\, dx\,dy = dt\, dw$)

(IN GENERALE $\iint_A g(\phi(x,t))\, |\det J_\phi(x,y)|\, dx\,dy = \iint_{\phi(A)} g(t,w)\, dt\, dw$)

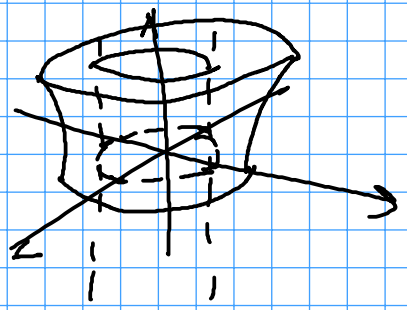
$$\circledast = \int_0^1 t\, dt \int_0^t \frac{dw}{1 + w^2} = \int_0^1 t\, dt \arctan(t)\, dt = \text{(per parti)}$$

$$\left[\frac{t^2}{2}\arctan(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2}\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\arctan(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\arctan t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Es. Calcolare il volume dell'insieme $D := \{1 \le x^2+y^2 \le 9+z^2,\ 0 \le z \le 4\}$

$$\iiint_D dx\,dy\,dz = \text{(coordinate cilindriche)}$$

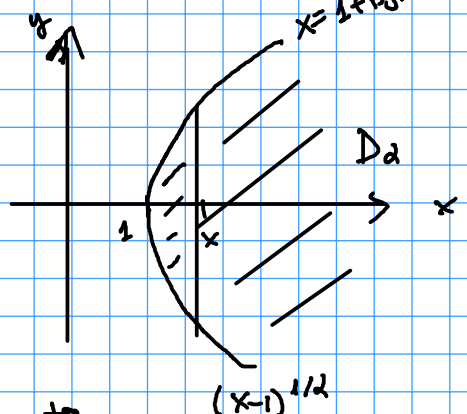


$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 dz \int_1^{\sqrt{9+z^2}} \rho\,d\rho = 2\pi \int_0^4 dz \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^{\sqrt{9+z^2}} =$$

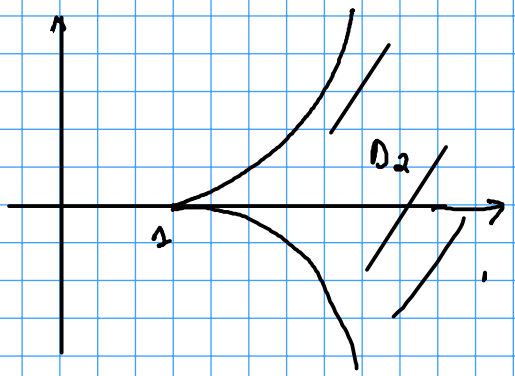
$$\pi \int_0^4 (9+z^2-1)\,dz = \pi\left(32 + \frac{z^3}{3}\Big|_0^4\right) = \pi\left(32+\frac{64}{3}\right) = \frac{160\pi}{3}$$

Es. Per quali $\alpha > 0$ converge il seguente integrale?

$$\iint_{D_\alpha} \frac{y^2}{x^4}\,dx\,dy \qquad \text{dove } D_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|^\alpha \le x-1\}$$



$\alpha > 1$



$\alpha < 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} \int_{-(x-1)^{1/\alpha}}^{(x-1)^{1/\alpha}} y^2\,dy = 2\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{(x-1)^{1/\alpha}} =$$

$$\frac{2}{3}\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{(x-1)^{3/\alpha}}{x^4}}_{\simeq \frac{x^{3/\alpha}}{x^4} = \frac{1}{x^{4-3/\alpha}}}\,dx \qquad < +\infty \iff 4-\frac{3}{\alpha} > 1 \iff 3 > \frac{3}{\alpha} \iff$$

$$\boxed{\alpha > 1}$$

SI POTEVA ANCHE FARE "NELL'ALTRO VERSO"

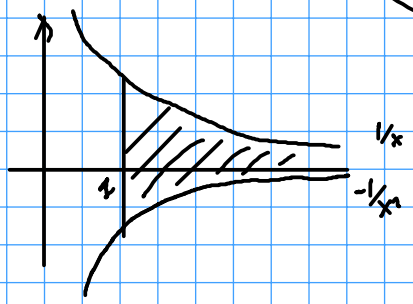
$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\,dy \int_{1+|y|^2}^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\,dy \left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_{1+|y|^2}^{+\infty} =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\,dy\ \frac{1}{3}\left(1+|y|^2\right)^{-3} = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{\left(1+|y|^2\right)^3}\,dy \quad < +\infty \iff$$

$$3\alpha - 2 > 1 \iff 3\alpha > 3 \iff \boxed{\alpha > 1}$$

Es. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge

$$\iint_D \frac{\sqrt{x}}{|y|^\alpha}\,dx\,dy \qquad D = \left\{ x \geq 1,\ -\frac{1}{x^2} \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$$



$$= \int_1^{+\infty} dx\,\sqrt{x} \int_{-\frac{1}{x^2}}^{\frac{1}{x}} \frac{dy}{|y|^\alpha} =$$

SE $\alpha < 1$ (SE NO VIENE $\int_1^{+\infty} = 0$)

$$\int_{-\frac{1}{x^2}}^{\frac{1}{x}} \frac{dy}{|y|^\alpha} = \int_{-\frac{1}{x^2}}^{0} \frac{dy}{|y|^\alpha} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dy}{|y|^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ -\left[\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{-\frac{1}{x^2}}^{0} + \left[\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^{\frac{1}{x}} & \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^{1-\alpha}}\,dx + \frac{1}{1-\alpha}\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^{2(1-\alpha)}}\,dx \qquad \text{CONVERGE} \iff \boxed{\alpha < -\frac{1}{2}}$$

12

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}-\alpha}}$$

DEVE ESSERE $\frac{1}{2} - \alpha > 1$

$\alpha < -\frac{1}{2}$

12

$$\frac{1}{x^{\frac{3}{2}-2\alpha}}$$

DEVE ESSERE

$\frac{3}{2} - 2\alpha > 1 \iff 2\alpha < \frac{1}{2} \iff \alpha < \frac{1}{4}$