Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 36 7/3/18

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Esercizio Dato $f(x,y) = x^2 y^2 + \frac{4}{x^2+y^2}$

cerco massimi e minimi di f su $B = \{ 1 \le x^2+y^2 \le 4 \}$

Nota B è limitato, e chiuso, f è continua su B (fuori da $(0,0) \notin B$). $\Rightarrow \exists \max_B f \,/\, \min_B f$

I pti di max/min possono:

(a) essere in $\mathring{B} = \{ 1 < x^2+y^2 < 4 \}$ e quindi essere stazionari per f

(b) essere in $\partial B = \{ x^2+y^2 = 1 \} \cup \{ x^2+y^2 = 4 \}$. In questo caso li cerco con il metodo dei moltiplicatori

(a) Cerco i pti stazionari di f in $\mathring{B}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x y^2 - \frac{8x}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y - \frac{8y}{(x^2+y^2)^2}$$

Se impongo $\nabla f = 0$ trovo

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff x = 0$ oppure $y^2 = \frac{4}{(x^2+y^2)^2}$ / $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff y = 0$ oppure $x^2 = \frac{4}{(x^2+y^2)^2}$

DUNQUE (1) $x=0$, $y=0$ oppure $x^2 = y^2 = \frac{4}{4x^4} = \frac{4}{4y^4}$

cioè $x = \pm y$ $\quad x^2 = \frac{1}{x^4}$ $\quad x^6 = 1 \iff x = \pm 1$

ALLA FINE TROVO $(0,0) \notin \mathring{B}$ / $(\pm 1, \pm 1) \in \mathring{B}$ (4 PUNTI)

f vale $\frac{4}{2} + 1 = 3$

(5) Possiamo applicare multipliers su $\partial B = S_1 \cup S_2$

$S_1 = \{x^2+y^2 = 1\}$ $\quad S_2 = \{x^2+y^2 = 4\}$.

$\{g(x,y) = 1\}$ $\quad \{g(x,y) = 4\}$ $\quad$ se $g(x,y) = x^2+y^2$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$. Se uso i multipliers:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xy^2 - \frac{8x}{(x^2+y^2)^2} = 2\lambda x \\ 2x^2 y - \frac{8y}{(x^2+y^2)^2} = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

La prima riga $\iff$ $x=0$ oppure $y^2 - \frac{4}{(x^2+y^2)^2} = \lambda$

Se $x=0$ viene $y = \pm 1$ (dalla III°) e nella seconda

$\pm 4 = \lambda$ DUNQUE TROVO $(0, \pm 1)$

La seconda riga $\iff$ $y=0$ oppure $x^2 - \frac{4}{(x^2+y^2)^2} = \lambda \iff (\pm 1, 0)$

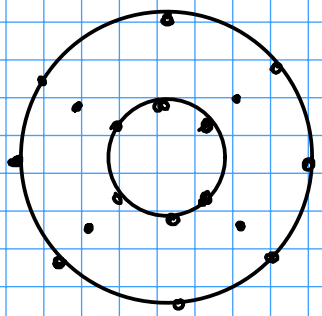
Nell'ultimo caso $\lambda = y^2 - \frac{4}{(x^2+y^2)^2} = x^2 - \frac{4}{(x^2+y^2)^2} \iff x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Infine anche $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ vanno bene.

$f(0, \pm 1) = 4 = 5 = f(\pm 1, 0)$ / $f\left(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2\right) = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$

Su S_2 è lo stesso (sugli assi e sulle bisettrici) TROVO

$(0, \pm 2)$, $(\pm 2, 0)$, $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$

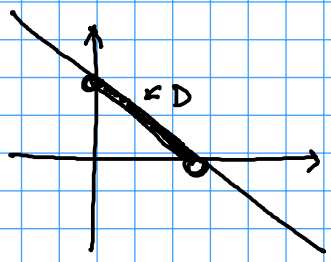


$f(0, \pm 2) = 1$ ← MINIMO

$f(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = 1 + 4 = 5$ ← MASSIMO

VARIANTE (da un compitino vecchio): TROVARE

$\max_D f$, $\min_D f$ dove $D = \{x+y = 1 \,,\, x \geq 0,\ y \geq 0\}$



Modo elementare: considero $0 \leq x \leq 1$ e studio $f(x, 1-x)$ su $[0,1]$

oppure con i moltiplicatori usando $g(x,y) = x + y - 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \qquad x > 0,\ y > 0$$

" " " i punti $(0,1)$ e $(1,0)$ "

$$\begin{cases} 2xy^2 - \frac{8x}{(x^2+y^2)^2} = \lambda \cdot 1 \\ 2x^2 y - \frac{8y}{(x^2+y^2)^2} = \lambda \cdot 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad x > 0,\ y > 0$$

$$\Rightarrow \quad 2xy^2 - \frac{8x}{(x^2+y^2)^2} - 2x^2 y + \frac{8y}{(x^2+y^2)^2} = 0 \iff$$

$$2xy(y - x) + \frac{8}{(x^2+y^2)^2}(y - x) = 0 \iff$$

$x = y$ (1) oppure $xy + \frac{4}{(x^2+y^2)^2} = 0$ (2)

Nel caso (1), impongo $x + y = 1 \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Il caso (2) non è possibile se $x > 0$ $y > 0$

ALLA FINE DEVO CONFRONTARE I VALORI DI f sui punti

$(0,1)$ $\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)$ $(1,0)$ $\Rightarrow$ $f(0,1) = 4 = f(1,0)$ ← MIN

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{4}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{16} = 8 + \frac{1}{16}$$ ← MAX