Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

# Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

## Lezione 35 6/3/18

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

COMPITINO: Data probabile venerdì 16/3 alle ore 15.00

---

Concludere la teoria dell'integrazione.

RIASSUNTO: ABBIAMO

- Definita la misura (esterna) di un qualunque insieme di $\mathbb{R}^N$ (eventualmente infinita) $m^*(E)$ $\forall E \subseteq \mathbb{R}^N$
- Definita la classe degli insiemi MISURABILI: sui quali $m^*$ ha delle "buone proprietà"; e la classe delle funzioni misurabili: $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$
- Per ogni $E$ misurabile ha $m(E)$ $(= m^*(E))$ e per ogni $f$ misurabile positivo ha definito $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx$ (eventualmente infinito) (misura del sottografico)
- Se $f$ è misurabile ma non è $\geq 0$ ($\leq 0$) dico che $f$ è INTEGRABILE se $f^+$ e $f^-$ hanno integrali finiti. In questo caso $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f^+\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^-\,dx$

$\left( f = f^+ - f^- \,,\ |f| = f^+ + f^- \right)$ [$f$ integrabile $\Leftrightarrow |f|$ integrabile]

- VARI TEOREMI ( Fubini-Tonelli / cambio di var. )

sempre due versioni: una per le funzioni misurabili $\geq 0$ (in cui eventualmente può valere $+\infty$) e una per le integrabili.

---

"Integrali impropri" (secondo la terminologia di Riemann)

cioè di funzioni illimitate su insiemi illimitati

NON SI TRATTA DI UN CASO A PARTE (è già contenuto nella teoria generale).

ESEMPIO $\quad f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} \quad$ con $\alpha > 0$

$f(0,0) = +\infty$

Nota che $f \geq 0$, $f$ è misurabile ( è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $\{(0,0)\}$ è trascurabile )

Posso CERCARE L'INTEGRALE DI $f$ su $\mathbb{R}^2$ o su $B \subset \mathbb{R}^2$ ($B$ misurabile) Dato che $f$ è mis., $f \geq 0$ posso applicare tutti i teoremi visti (nelle versioni 1)

Posso passare a coord. polari $\quad x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho^\alpha}\,\rho\,d\rho = 2\pi \underbrace{\int_0^{+\infty} \rho^{1-\alpha}\,d\rho}_{\text{SENSO INT. DI LEBESGUE}}$$

$$= 2\pi \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_{1/R}^{R} \rho^{1-\alpha}\,d\rho}_{\text{COINCIDE CON L'INT. DI RIEMANN - LO CALCOLO MEDIANTE IL TEOR. FOND. CALCOLO}} =$$

( Teor. Se $f \geq 0$, mis. $A_n \subset A_{n+1}$ misurabili e $A = \bigcup A_n \Rightarrow$ $\int_A f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\,dx$ )

$$= 2\pi \lim_{R\to\infty} \left[ \frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_{1/R}^{R} =$$

(se $2-\alpha \neq 0$ se no viene un $\ln(\rho)$)

$$\frac{2\pi}{2-\alpha} \lim_{R\to\infty} \left( R^{2-\alpha} - \frac{1}{R^{2-\alpha}} \right) = +\infty$$

( se $\alpha > 2$ $\frac{1}{R^{2-\alpha}} \to \infty$

se $\alpha < 2$ $R^{2-\alpha} \to \infty$

( se $\alpha = 2$ viene $+\infty$ lo stesso $\to$ viene $\ln(R) - \ln(1/R)$ ) ...

NON È MAI INTEGRABILE SU TUTTO $\mathbb{R}^2$

PROVIAMO A VEDERE SE È INT. SU $B = \{ x^2+y^2 \le 1 \}$

Stessi calcoli $\Rightarrow$

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\rho^\alpha} \rho\, d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho^{1-\alpha} d\rho =$$

$$2\pi \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \rho^{1-\alpha} d\rho = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[ \frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_\varepsilon^1$$ (se $\alpha \neq 2$ se no ... )

$$= \frac{2\pi}{2-\alpha} \lim_{\varepsilon\to 0} \left( 1 - \varepsilon^{2-\alpha} \right) = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} & \text{se } 2-\alpha > 0 \iff \alpha < 2 \\ +\infty & \text{se } 2-\alpha < 0 \iff \alpha > 2 \end{cases}$$

(se $\alpha = 2$ viene $+\infty$ lo stesso - fare i calcoli ... )

DUNQUE

$f$ è integrabile su $B \iff \boxed{\alpha < 2}$ e

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \frac{2\pi}{2-\alpha}$$

(in $\mathbb{R}$ la funzione $\frac{1}{|x|^\alpha}$ è integrabile su $[0,1] \iff \alpha < 1$ )

Se si fa tutto in $\mathbb{R}^3$ ( usando le coordinate sferiche ) si vede che

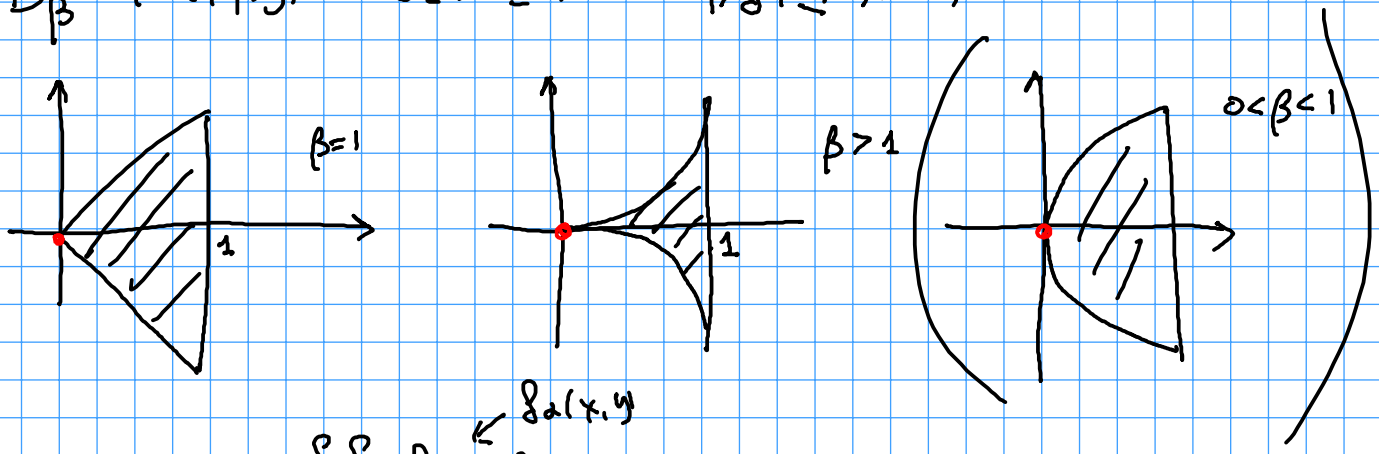
$$\iiint_{B(0,1)} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}} < +\infty \iff \alpha < 3$$

Se prendo $B_1 = \{ x^2+y^2 \ge 1 \} = \mathbb{C}B$ con gli stessi calcoli ho

$$\iint_{\{x^2+y^2\geq 1\}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}\,dx\,dy < +\infty \iff \alpha > 2$$

Proviamo su un'altro insieme: Consideriamo un altro parametro $\beta \geq 1$

$$D_\beta = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \quad |y| \leq x^\beta\}$$




Proviamo a valutare $\iint_{D_\beta} f_\alpha(x,y)\,dx\,dy$ ← $f_\alpha(x,y)$ = . Uso Fubini-Tonelli:

$$\int_0^1 dx \int_{-x^\beta}^{x^\beta} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} = 2\int_0^1 dx \int_0^{x^\beta} \frac{dy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} =$$

$$2\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \int_0^{x^\beta} \frac{dy}{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{\alpha/2}} = \left(z = \frac{y}{x} \text{ nell'integrale interno}\right)$$

$$dz = \frac{dy}{x}$$

$$2\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}} \int_0^{x^{\beta-1}} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}} F(x)$$

dove $F(x) = \int_0^{x^{\beta-1}} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}}$ ← devo valutare come $x$ compreso $F(x)$ per $x \geq 0$

Noto che l'integrando $g(z) = \frac{1}{(1+z^2)^{\alpha/2}}$ è continuo anche a $z=0$, $g(0)=1$

$$\Rightarrow G(t) = \int_0^t g(z)\,dz \simeq t \qquad (G'(0) = g(0) = 1)$$

FORMALMENTE $\frac{G(t)}{t} \to 1$ per $t \to 0$ TEOR. FOND. CALCOLO

$$\Rightarrow F(x) = G(x^{\beta-1}) \simeq x^{\beta-1}$$

DUNQUE L'INTEGRABILITÀ

DI $f_\alpha$ su $D_\beta$ EQUIVALE ALL'INTEGRABILITÀ DI

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}}\, x^{\beta-1}\,dx \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-\beta}}\,dx < +\infty \iff \alpha-\beta<1$$

$$\boxed{\alpha < 1+\beta}$$

Per esempio se $\beta=2$ allora $f$ è integrabile per $\alpha<3$

---

ULTIMO ARGOMENTO DI TEORIA:

## PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

**PROBLEMA** Supponiamo che per ogni $n\in\mathbb{N}$ sia data una funzione

$f_n: D \to [-\infty,+\infty]$ $\quad D\subset\mathbb{R}^N$ misurabile, $f_n$ integrabile su $D$.

Supponga anche che per ogni $x\in D$ esista $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$

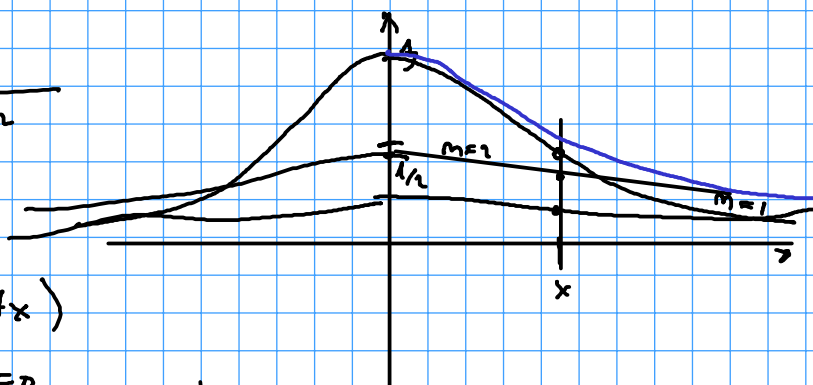
[$\Rightarrow$ $f: D\to[-\infty,\infty]$, misurabile e c'è un teorema], MI CHIEDO SE

$$(\exists?)\ \int_D f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_D f_n(x)\,dx \quad ??$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\int_D f_n(x)\,dx = \int_D \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ :\ \text{SCAMBIO TRA INT E LIMITE}\right)$$

IN GENERALE LA RISPOSTA È NO. VEDIAMO UN ESEMPIO

Su $\mathbb{R}$ prendo $f_n(x)=\dfrac{n}{n^2+x^2}$




Se faccio il $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+x^2}=0$ $(\forall x)$

Quindi $f(x)=0$ $\forall x \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0$

Vediamo di calcolare $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{n\,dx}{n^2+x^2} = \dfrac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}$

$y=\frac{x}{n}$ $\quad dy=\frac{dx}{n}$ $\quad\to \int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dy}{1+y^2} = \Big[\arctan y\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$

DUNQUE $$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \pi \neq 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

RISULTA QUINDI IMPORTANTE:

**Teorema** (di Lebesgue - della convergenza dominata)

Se $(f_n)$ sono funzioni misurabili definite su $D$ misurabile di $\mathbb{R}^N$ $f_n : D \to [-\infty, +\infty]$, tali che, $\forall x \in D$ $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ ($f$ misurabile).

Se esiste una $g : D \to [0, +\infty]$ integrabile t.c.

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in D$$

Allora (le $f_n$ sono tutte integrabili su $D$, $f$ lo è anche) si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_D f_n(x)\,dx = \int_D f(x)\,dx$$

Per esempio se $$f_n(x) = \frac{n^\alpha}{n^2 + x^2} \qquad 0 < \alpha < 2$$

Qualunque sia $\alpha \in ]0,2[$ $f_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$

Dal calcolo fatto prima vedo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = n^{\alpha-1}\,\pi \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \pi & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } 1 < \alpha < 2 \end{cases}$$

Vediamo (per curiosità) che nel caso $\alpha < 1$ si può applicare Lebesgue

MI SERVE UNA $g$ integrabile tale che

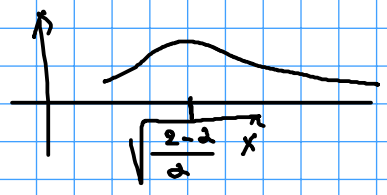
$$\frac{n^\alpha}{n^2 + x^2} \leq g(x)$$

Fissato $x \in \mathbb{R}$ quanto fa $\max_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^\alpha}{n^2 + x^2}$ ?!?

conviene prendere $\max_{y \geq 1} \underbrace{\frac{y^\alpha}{y^2 + x^2}}_{f(y)}$ STUDIO $f(y)$

$f(1) = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad f'(y) = \frac{\alpha y^{\alpha-1}(y^2+x^2) - y^\alpha 2y}{(y^2+x^2)^2} = \frac{(\alpha-2)y^{\alpha+1} + \alpha x^2 y^{\alpha-1}}{(y^2+x^2)^2}$

si annulla per $y=0$, $y^2 = \frac{2-\alpha}{\alpha} x^2$ ← PTO DI MAX




Se calcolo $f(y)$ in questo valore trovo

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\, x\right)^\alpha}{\frac{2-\alpha}{\alpha} x^2 + x^2} = \text{cost} \cdot \frac{x^\alpha}{x^2} = \underbrace{\text{cost} \cdot \frac{1}{x^{2-\alpha}}}_{g(x)}$$

Se prendo $\alpha < 1$ ho <u>$g$ è integrabile su $[1, +\infty]$</u>

$\Rightarrow$ $f_n(x) \le g(x)$ $\forall x \ge 1$ IL <u>TEOREMA VALE</u>

ALTRO TEOREMA (DERIVATA SOTTO IL SEGNO DI INT.)

<u>Teorema</u> Dato $f(x,y)$ $y \in D \subset \mathbb{R}^M$ $D$ misurabile

$x \in \Omega \in \mathbb{R}^N$ $\Omega$ aperto ; Suppongo $f$ misurabile in $\Omega \times D$. Suppongo che $\exists\ g : D \to [0, +\infty]$ integrabile :

$$|f(x,y)| \le g(y) \quad \forall y \in D \quad \forall x \in \Omega.$$

SUPPONGO ANCHE :

$\forall y \in D$ $f(x,y)$ è continua in $x_0 \in \Omega$

<u>ALLORA</u> La funzione $F(x) := \int_D f(x,y)\, dy$ è ben definita $\forall x \in \Omega$ ed è CONTINUA in $x_0$

$$\left( \lim_{x \to x_0} \int_D f(x,y)\, dy = \int_D \lim_{x \to x_0} f(x,y)\, dy \right)$$

INOLTRE se $\forall y \in D$ $f$ è $C^1$ rispetto a $x$ e se

$\forall y \in D \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y) \right| \le g_1(y)$ con $g_1 : D \to [0,+\infty]$ integrabile

ALLORA

$$\exists \frac{\partial}{\partial x_i} F(x) = \int_D \frac{\partial}{\partial x_i} f(x,y)\,dy$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \int f(x,y)\,dy \right)$$

ESEMPIO CONSIDERO

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy \qquad \left( f(x,y) = e^{-xy^2} \right)$$

$F$ è definita per $x > 0$. DOMANDE $F$ è continua / derivabile su $]0,+\infty[$ ?!?)

- Per la continuità mi serve una $g(y)$ integrabile su $[0,+\infty[$ e tale che

$$|f(x,y)| \le g(y) \quad \forall x > 0 \ \forall y \ge 0$$

QUESTO NON SI PUÒ FARE, perché mandando $x \to 0$ dovrei

$1 \le g(y)$ che non è integrabile

- Però se fisso $x_0 > 0$, posso prendere $0 < \varepsilon < x_0$ e trovare $g$ integrabile su $[0,+\infty]$ per cui

$$|f(x,y)| \le g(y) \quad \forall y \ge 0 \quad \boxed{\forall x \ge \varepsilon}$$

($\Rightarrow$ $F$ è continua $\forall x_0 \ge \varepsilon$)

QUESTO MI RIESCE INFATTI Prendo $g(y) = e^{-\varepsilon y^2}$ $\Rightarrow$

$$e^{-xy^2} \le e^{-\varepsilon y^2} \qquad \forall y \ge 0 \ \forall x \ge \varepsilon$$

DUNQUE $F$ è continua su $[\varepsilon, +\infty[$ $\forall \varepsilon > 0$ $\Rightarrow$

F è continua su $]0,+\infty[$

Per la derivabilità faccio lo stesso gioco:

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} e^{-xy^2} = -y^2 e^{-xy^2}$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e considero $g_1(y) = y^2 e^{-\varepsilon y^2}$ ← È INTEGRABILE SU $]0,+\infty[$

e ho

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \right| \leq g_1(y) \qquad \forall x \geq \varepsilon \ \forall y$$

Per il teorema della derivata di F è derivabile (in x) $\forall x \geq \varepsilon$ e vale

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} y^2 e^{-xy^2} dy \qquad \forall x \geq \varepsilon$$

Dato che $\varepsilon$ è arbitrario la formula vale $\forall x > 0$