Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 33 12/12/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

FORMULA DI CAMBIO DI VARIABILE

Teorema Ω aperto di $\mathbb{R}^N$, $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^N$ di classe C^1, iniettiva

Prendiamo Ω_1 un aperto di $\mathbb{R}^N$ che contiene $\Phi(\Omega)$ e una funzione $f : \Omega_1 \to \mathbb{R}$.

VALGONO:

(1) Se f è misurabile $\Rightarrow$ $\left(f \circ \Phi\right) \left|\det \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|$ è misurabile (Jacobiana di Φ)

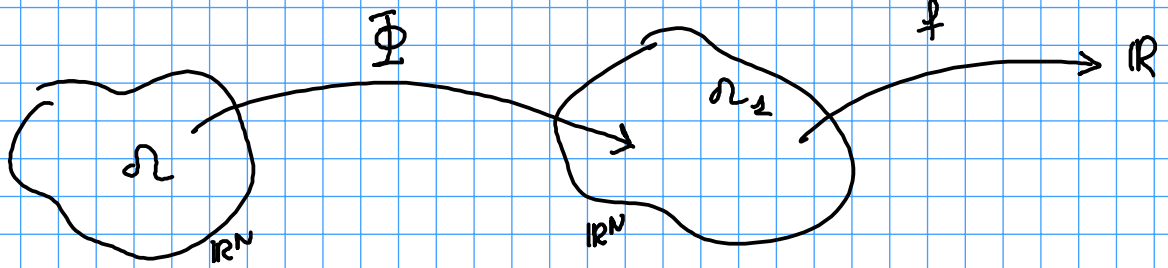
VA DA $\Omega \to \mathbb{R}$

(2) Se f è misurabile, $f \geq 0$ allora

$$(\star) \qquad \int_{\Omega_1} f(\Phi(x)) \left|\det \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x)\right| dx = \int_{\Phi(\Omega)} f(y)\, dy \qquad \left(\text{eventualmente } +\infty\right)$$

($\Phi(\Omega)$ è misurabile per il punto (1) prendendo $f = \mathbb{1}_\Omega$)

(3) Se f è integrabile su $\Omega_1 \Rightarrow$ VALE $(\star)$ e gli integrali sono finiti



TIPICAMENTE $\Phi : \Omega \to \Omega_1$ è BIGETTIVA

NO DIM (come al solito...)

CASO SPECIALE: COORDINATE POLARI

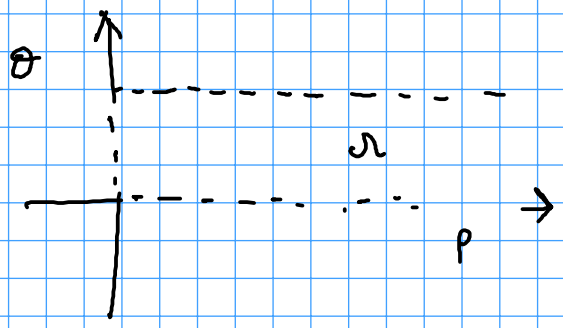
IN $\mathbb{R}^2$ considero l'applicazione Ψ

$$\Psi(x,y) = \begin{pmatrix} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \rho \geq 0 \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

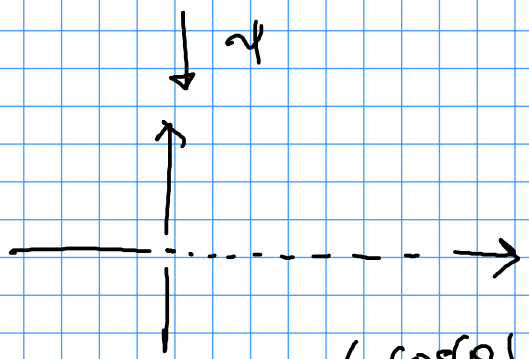
$$(x,y) = \Psi(\rho,\theta) \qquad \Psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

non è iniettiva (e il dominio non è un aperto)

MI RESTRINGO A $\Omega := \{\rho > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$



- Ψ è iniettiva su Ω
- purtroppo $\Psi(\Omega)$ non è tutto $\mathbb{R}^2$ (manca 0 e la semiretta $(x,0)$ con $x>0$)



Per questa Ψ posso applicare il cambio di variabili:

CALCOLIAMO LO Jacobiano

$$\frac{\partial\Psi}{\partial(\rho,\theta)}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det \frac{\partial\Psi}{\partial(\rho,\theta)}(\rho,\theta) = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

DUNQUE RICAVO CHE, se $\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \quad x \geq 0\}$,

e $f : \Omega_1 \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ misurabile, $f \geq 0$

$$(**) \qquad \iint_E f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta = \iint_{E_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

dove $E \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile e

$E_1 := \{ (x,y) : x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ (\rho,\theta) \in E \}$

Inoltre se f è integrabile su E_1 vale la (**) anche senza l'ipotesi $f \geq 0$

IL RISULTATO SOPRA SI PUÒ GENERALIZZARE DATO CHE GLI INSIEMI

$\{ (0,\theta),\ \theta \in [0,2\pi] \}$ è trascurabile in $\mathbb{R}^2$

$\{ (\rho, 0),\ \rho \geq 0 \}$ è trascurabile in $\mathbb{R}^2$

DUNQUE POSSO RICAVARE CHE, se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e se $E \subset \{ \rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$ è misurabile $\Rightarrow$

$$\iint_E f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta = \iint_{E_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

$E_1 = \{ (x,y) : x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta \text{ con } (\rho,\theta) \in E \}$

IN EFFETTI

$$\iint_E f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta = \iint_{E'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,d\rho\,d\theta =$$

(dove $E' = \{ (\rho,\theta) \in E \text{ con } \rho > 0,\ \theta \neq 0,\ \theta \neq 2\pi \}$ $\square$

$E' \subset E$ $\quad E \setminus E'$ è trascurabile)

$$\iint_{E_1'} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{E_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

$E_1' = \{ (x,y) : x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ (\rho,\theta) \in E' \} \subset E_1$

$(E_1 \setminus E_1'$ è trascurabile

(ipotesi grandy $f : E_1 \to [-\infty, +\infty]$)

ALLA FINE (riassumo)

$$\iint_E f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta = \iint_{E_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

Se

$E \subset \{\rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ misurabile e

$E_1 := \{(x,y) : \exists (\rho,\theta) \in E$ con $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta\}$

$f : E_1 \to [-\infty, +\infty]$ integrabile

NOTA: Posso prendere $E \subset \{\rho \geq 0,\ k \leq \theta \leq k + 2\pi\}$

ESEMPIO

$$\int_A y^2\,dx\,dy \qquad A = \{x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$$

Si vede che ponendo $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$

si può prendere $E := \{0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$

($A = E_1$ nel teorema)

QUINDI USANDO LA FORMULA TROVO

$$\int_E \int \rho^2 \sin^2\theta\ \rho\,d\rho\,d\theta = \iint_A y^2\,dx\,dy$$

E è normale:

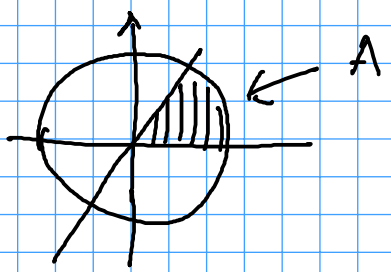
$$\int_E \int \rho^3 \sin^2\theta\,d\rho\,d\theta = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \rho^3 \sin^2\theta\,d\theta\right) d\rho = \underbrace{\left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right)}_{(1)} \underbrace{\left(\int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta\right)}_{(2)}$$

$$(1) = \int_0^1 \rho^3\,d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$(2) = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{\pi}{2} \quad (\text{---})$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

$$\int_A \int (x^2+y^2)\,dx\,dy \qquad A = \{x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$$



Se $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in A$

$\Downarrow$

$0 \leq \rho \leq 1$ $\left(\Leftarrow (\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 \leq 1\right)$

$y \geq 0 \Rightarrow \rho\sin\theta \geq 0 \Rightarrow \sin\theta \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$

$y \le x \Rightarrow \rho \sin\theta \le \rho\cos\theta \Rightarrow \sin\theta \le \cos\theta \Rightarrow$

$(\tan\theta \le 1 \text{ e } \cos\theta > 0, \quad \tan\theta \ge 1, \cos\theta < 0)$

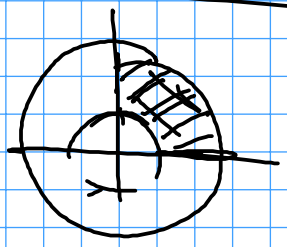
ALLA FINE $\boxed{0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}}$

$E = \{ 0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \theta \le \pi/4 \}$

DUNQUE

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} d\theta \right) \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{16}$$

$$\iint_A xy \, dx\,dy$$

$A =$ 

$\{ \quad 1 \le x^2+y^2 \le 4, \ x \ge 0, \ y \ge 0 \}$

$E = \{ 1 \le \rho \le 2, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \}$

$$\int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\cos\theta \, \rho \sin\theta \, \rho \, d\theta \right) d\rho = \left(\int_1^2 \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \right)$$

① ②

$$① = \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^2 = \frac{16-1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$② = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \left(1 + 1 \right) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ INTEGRALE $= \frac{15}{8}$