Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 32 6/12/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

INTEGRALI ITERATI

CI METTIAMO IN $\mathbb{R}^{N+M}$ e indichiamo i punti di $\mathbb{R}^{N+M}$ come (x,y) con $x \in \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^M$.

CI SONO DUE TEOREMI. Il primo (TONELLI) riguarda funzioni misurabili ≥ 0 (e ammette il valore $+\infty$). Il secondo teorema (FUBINI) considera funzioni a segno variabile di cui si chiede che siano integrabili (INTEGRALI FINITI)

TEOREMA (Tonelli) Sia $f : \mathbb{R}^{N+M} \to [0, +\infty]$ (dunque $f \geq 0$)

Se $y \in \mathbb{R}^M$ INDICO $f_y(x) := f(x,y)$ ($f_y : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty]$)

SE f è misurabile (su $\mathbb{R}^{N+M}$) allora:

(1) per quasi ogni $y \in \mathbb{R}^M$ la funzione f_y è misurabile (cioè $\{y : f_y \text{ NON MIS.}\} = E_0$ è trascurabile in $\mathbb{R}^M$)

DUNQUE, per quasi ogni y posso considerare

$$\left(F(y) :=\right) \int_{\mathbb{R}^N} f_y(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,dx$$

(2) Se definisco come mi pare $F(y)$ per le $y \in E_0$

$\Rightarrow$ F è misurabile su $\mathbb{R}^M$

(3) Vale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^M} F(y)\,dy = \iint_{\mathbb{R}^{N+M}} f(x,y)\,dx\,dy$

IN ALTRI TERMINI

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}^M} \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,dx}_{\bullet} \Big) dy = \iint_{\mathbb{R}^{N+M}} f(x,y)\,dx\,dy \quad \left(\text{PUÒ ESSERE } +\infty\right)$$

(se $f \geq 0$ misurabile vale la $(*)$, dove l'integrale INTERNO $(\bullet)$ esiste per quasi ogni y)

<u>NOTA</u> Se $f \geq 0$ misurabile $\Rightarrow$

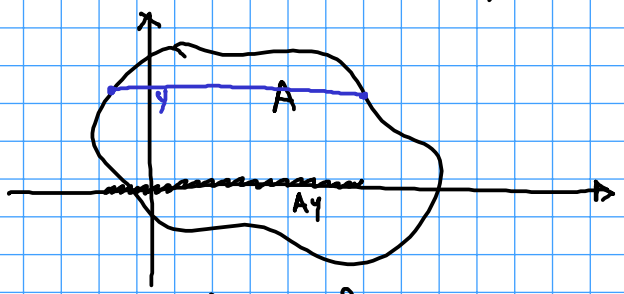
$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy \Big) dx = \int_{\mathbb{R}^M} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,dx \Big) dy \quad \left(= \iint_{\mathbb{R}^{N+M}} f(x,y) \right)$$

<u>CONSEGUENZA</u>: PRINCIPIO DI CAVALIERI

Sia $A \subset \mathbb{R}^{N+M}$ <u>misurabile</u>.

Per ogni $y \in \mathbb{R}^M$ poniamo $A_y : \{ x \in \mathbb{R}^N : (x,y) \in A \}$

A_y è "la sezione" a livello y (proiettata su $\mathbb{R}^N$)



Da Tonelli deduco che:

(1) Per quasi ogni $y \in \mathbb{R}^M$ l'insieme A_y è misurabile in $\mathbb{R}^N$

(2) Si ha

$$m(A) = \int_{\mathbb{R}^M} m(A_y)\,dy$$

(dove $m(A_y)$ è scelto a piacere per le y con A_y non misurabile)

Per vederlo basta applicare il teorema di Tonelli alla funzione

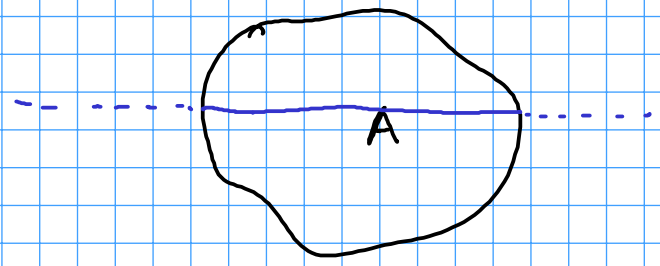
$$f_A(x,y) = f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in A \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin A \end{cases} \qquad \left(= \mathbb{1}_A(x,y) \right)$$

(funzione indicatrice di A):

$$m(A) = \iint_{\mathbb{R}^{N+M}} f_A(x,y)\,dx\,dy = \text{(Tonelli)}$$

$$\int_{\mathbb{R}^M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f_A(x,y)\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^M} \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{A_y}(x)\,dx}_{m(A_y)} \Big) dy =$$

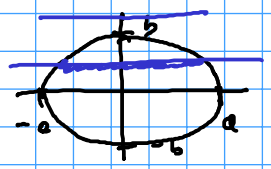
$$\int_{\mathbb{R}^M} m(A_y)\,dy$$



ESEMPIO AREA DELL'ELLISSE

$$A = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$$

(ellisse di semiassi a, b)



Dato y $\quad A_y = \left\{ \frac{x^2}{a^2} \le 1 - \frac{y^2}{b^2} \right\} =$

$$\begin{cases} \phi & \text{se } y^2 > b^2 \\ \left[-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},\ \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} \right] & \text{se } y^2 \le b^2 \end{cases}$$

$$m(A_y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |y| > b \\ \frac{2a}{b}\sqrt{b^2-y^2} & \text{se } |y| \le b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad m(A) = \int_{\mathbb{R}} m(A_y) = \int_{-b}^{b} \frac{2a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,dy =$$

$$2\int_{-b}^{b}\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\,dy = \qquad t=\frac{y}{b} \qquad dy = b\,dt$$

$$2ab\underbrace{\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}}_{\frac{\pi}{2}} = ab\pi$$

TEOREMA DI FUBINI Dato $f:\mathbb{R}^{N+M}\to[-\infty,+\infty]$ INTEGRABILE

Definito f_y come prima valgono le stesse proprietà:

(1) Per quasi ogni y f_y è integrabile (in x) su $\mathbb{R}^N$

(2) La funzione

$$F(y) := \int_{\mathbb{R}^N} f_y(x)\,dx \quad \left(= \int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,dx\right)$$

definito a pezzi dove (1) non vale, è integrabile e

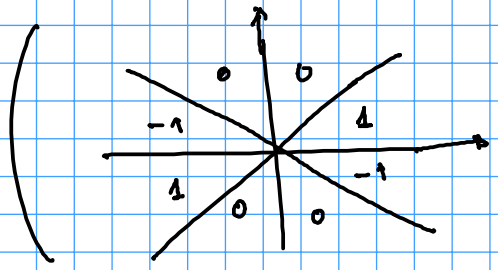
(3)
$$\int_{\mathbb{R}^M} F(y)\,dy = \iint_{\mathbb{R}^{N+M}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\int_{\mathbb{R}^M}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,dx\right)dy$$

(STAVOLTA GLI INTEGRALI DEVONO ESSERE FINITI)

OSS. Di nuovo, se f è integrabile in $\mathbb{R}^{N+M}$, gli integrali iterati non dipendono dall'ordine

SE f non è integrabile può succedere che scambiando l'ordine cambi il risultato (LO VEDIAMO PIÙ AVANTI)



$$\int f(x,y)\,dy = 0 \quad \forall x$$

$$\int f(x,y)\,dx \quad \text{NON ESISTE} \quad \forall y$$

$$\iint_A xy\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad A=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1+x\}$$

PER RICONDURMI A UNO DEI DUE TEOREMI DEVO CONSIDERARE

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} xy & \text{se } (x,y) \in A \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin A \end{cases}$$

$\tilde{f}$ è misurabile : xy è continua su $\mathbb{R}^2$

DUNQUE xy È MISURABILE

A è misurabile dato che è intersezione di insiemi misurabili: $\{x \geq 0\}$ è mis (x è continua su $\mathbb{R}^2$)

$\{x \leq 1\}$ " " " "

$\{x^2 - y \geq 0\}$ è mis $x^2 - y$ è continua

$\{x - 1 - y \leq 0\}$ è mis . . —

(FATTO Se f è mis. $\Rightarrow$ $\{f \leq c\}$ $\{f \geq c\}$ $\{f < c\}$ $\{f > c\}$ sono mis.

$\Rightarrow$ $\boxed{\tilde{f} \text{ è misurabile}}$ Posso usare Tonelli ($\tilde{f} \geq 0$)

Posso usare anche Fubini perché è chiuso da

A è limitato f è limitata su A ($\tilde{f}$ limitata e nulla fuori da un limitato)

$\Rightarrow$ l'integrale è finito

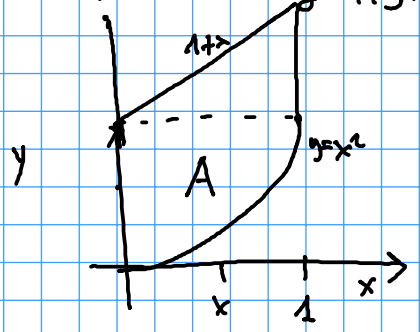
UNO A CASO:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x,y)\,dy \right) dx = \quad \left(\text{se } x \notin [0,1] \quad \tilde{f}(x,y) = 0 \ \forall y \right)$$

$$\int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{1+x} xy\,dy \right) dx =$$



$$\int_0^1 x \left(\int_{x^2}^{1+x} y \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} \left((1+x)^2 - x^4 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left(1 + 2x + x^2 - x^4 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x + 2x^2 + x^3 - x^5 \right) dx =$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} x^3 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2} \frac{6+8+3-2}{12}$$

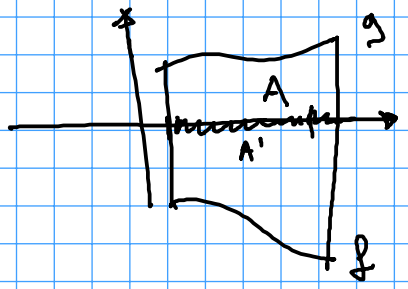
$$= \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

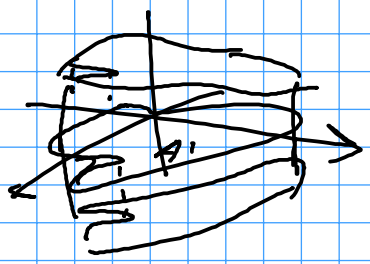
SI PUÒ FORMALIZZARE LA SITUAZIONE PRECEDENTE

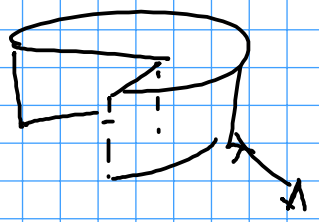
DEF Dico che $A \subset \mathbb{R}^{N+1}$ è normale rispetto all'asse $N+1$ esimo se esiste $A' \subset \mathbb{R}^N$ e due funzioni $f, g : A' \to \mathbb{R}$ tali che $f \le g$ e

$$A = \{ (x, y) : x \in A' \ f(x) \le y \le g(x) \}$$

NEL SEGUITO SUPPONGO f, g siano CONTINUE







Se A è come sopra e se $h : A \to [-\infty, +\infty]$

INTEGRABILE (Ad esempio continua) $\Rightarrow$

$$\iint_A h(x,y) \, dx \, dy = \int_{A'} \left(\int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y) \, dy \right) dx$$

ESEMPIO $\iint_A x \sin |x^2 - y| \, dx \, dy = \circledast$ (f continua A limitata $\Rightarrow$ f integrabile)

$$A = \{ (x,y) : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1 \}$$ (quadrato)

(normale sia rispetto a y sia rispetto a x)

$$\circledast = \int_0^1 \left(\int_0^1 x \sin|x^2 - y| \, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x \sin|x^2 - y| \, dy \right) dx$$

$\uparrow$ $\quad x^2 = t \qquad 2x\,dx = dt$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^1 \sin|t - y| \, dt \right) dy \quad = \circledast\circledast$$

se fisso $y \in [0,1] \Rightarrow \sin|t-y| = \begin{cases} \sin(t-y) & \text{se } t \geq y \\ -\sin(t-y) & \text{se } y \geq t \end{cases}$

DUNQUE

$$\circledast\circledast = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^y -\sin(t-y)\,dt + \int_y^1 \sin(t-y)\,dt \right) dy =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left[\cos(t-y) \right]_{t=0}^{t=y} - \left[\cos(t-y) \right]_{t=y}^{t=1} \right) dy =$$

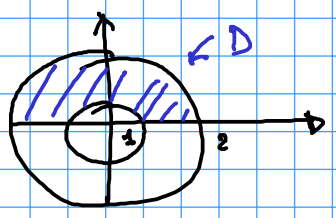
$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \cos(-y) - \cos(1-y) + 1 \right) dy =$$

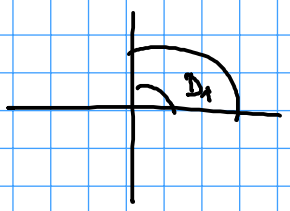
$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(2 - \cos(y) - \cos(1-y) \right) dy =$$

$$1 + \frac{1}{2} \left[-\sin(y) + \sin(1-y) \right]_0^1 = 1 - \frac{\sin(1) - \sin(1)}{2}$$

$$= 1 - \sin(1)$$

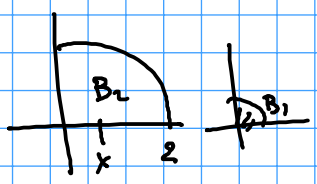
ESEMPIO $\quad \iint_D x^2 \, dx\,dy \quad$ dove $D = \{ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \,,\ y \geq 0 \}$





Per simmetria: $\iint_D x^2 \, dx\,dy =$

$$2 \iint_{D_1} x^2 \, dx\,dy = 2 \left(\iint_{B(2)^+} x^2 \, dx\,dy - \iint_{B(1)^+} x^2 \, dx\,dy \right)$$



$$\iint_{B(2)^+} x^2 \, dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 \, dy \right) dx = \int_0^2 x^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \right) dx =$$

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx \qquad \left(\int_{B(1)^+} x^2\,dx\,dy = \dots = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\right)$$

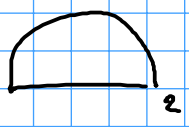
$$\int_0^2 x\left(\underbrace{x\sqrt{4-x^2}}_{=0}\right)dx = \underbrace{\left[x\left(\frac{-1}{3}\right)\left(4-x^2\right)^{3/2}\right]_0^2}_{=0} + \frac{1}{3}\int_0^2 \left(4-x^2\right)^{3/2}dx =$$

(per parti)

$$\frac{1}{3}\int_0^2 (4-x^2)\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{4}{3}\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx - \frac{1}{3}\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2} \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{3}\right)\left(4-x^2\right)^{3/2} = \left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(4-x^2\right)^{1/2}\cdot(-2x) = \underbrace{x\sqrt{4-x^2}}_{=0}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{4}{3}\underbrace{\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx}_{} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$



IL PRIMO INT. FA 2π . STESSO MODO:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 x\left(x\sqrt{1-x^2}\right)dx =$$

$$\underbrace{\left[x\left(\frac{-1}{3}\right)\cdot\left(1-x^2\right)^{3/2}\right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{3}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{3/2} = \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,(1-x^2) =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2} \Longrightarrow$$

$$\frac{4}{3}\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}$$

ALLA FINE L'INTEGRALE FA $2\pi - \frac{\pi}{8} = \frac{15\pi}{8}$