Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 31 5/12/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Altre proprietà

- Se A è aperto / chiuso $\Rightarrow$ A è misurabile (secondo Lebesgue - non è vero per Riemann)
- Se A è misurabile, allora
  $A+\vec{v}$ è misurabile ($A+\vec{v} = \{a+\vec{v}, a \in A\}$)
  ↳ traslato di A secondo $\vec{v}$
  PIÙ IN GENERALE
- Se A è misurabile e $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ è un'isometria, cioè è una applicazione tale che $\|T(x) - T(y)\| = \|x-y\|$
  (T conserva le distanze tra i punti)
  $\Rightarrow$ $T(A)$ è misurabile e $m(T(A)) = m(A)$
  (questo generalizza il punto precedente dato che, se $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$, $\Rightarrow$ $T(x) := x+\vec{v}$ è un'isometria)

- Le isometrie in $\mathbb{R}^3$ sono composizioni di
  - traslazioni
  - rotazioni
  - riflessioni rispetto a un asse

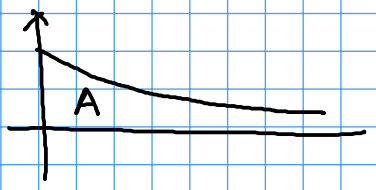
  } MOVIMENTI RIGIDI

ALCUNI ESEMPI (alcuni sono abbastanza "complessi")

- ESEMPIO SEMPLICE

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \quad 0 \leq y \leq e^{-x}\}$$

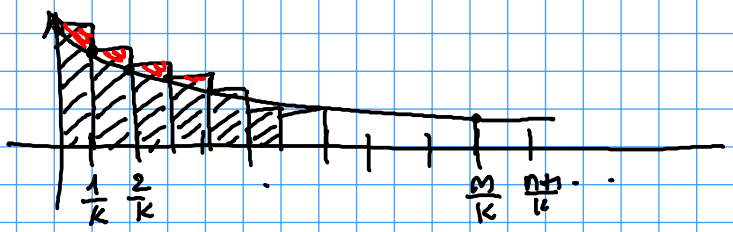
(A è chiuso perché $[0,+\infty[$ è chiuso e $x \mapsto e^{-x}$ è continua)



Dunque A è misurabile $\Rightarrow$ $m(A) = m^*(A)$

Calcolo $m^*(A)$

Dato $k \in \mathbb{N}$ considero P_k fatto come segue



$$P_k = \bigcup \left[\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}\right] \times \left[0, e^{-\frac{n}{k}}\right]$$ ← è un plurirettangolo

ovvero i rettangoli $R_{n,k} = \left[\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}\right] \times \left[0, e^{-\frac{n}{k}}\right]$ non sono disgiunti.

PERÒ SI SOVRAPPONGONO IN TRATTI DI MISURA NULLA

$$|P_k| = \sum_{n=0}^{+\infty} |R_{n,k}| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot e^{-\frac{n}{k}} = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{k}}\right)^n = \left(\text{serie geometrica di ragione } e^{-1/k} < 1\right)$$

$$= \frac{1}{k} \frac{1}{1 - e^{-1/k}}$$

$A \subset |P_k|$ e si vede che $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} P_k$

dai teoremi sull'unione e sull'intersezione $\Rightarrow$

$$|A| = \lim_{k \to \infty} |P_k| = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \frac{1}{1 - e^{-1/k}} \qquad (0 \cdot \infty)$$

Posso passare a $x = \frac{1}{k} \to 0$ $\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^{-x}} =$

(se c'è il limite a $x \to \infty$ $\Rightarrow$ c'è quello in $\frac{1}{k}$ $k \to \infty$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x}{1-e^{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{x}-1} = 1$$

DUNQUE $|A| = 1$ (USANDO I TEOREMI DETTI ISRI)

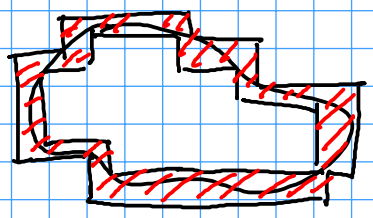
NOTA. ABBIAMO ANCHE CALCOLATO

$$\int_{[a,+\infty[} e^{-x}\,dx$$

ALTRI ESEMPI "STRANI"

FATTO Se A è misurabile secondo Riemann $\Rightarrow$

$m_R(\partial A) = 0$ perché dalla def. segue che



$\forall \varepsilon > 0$ posso trovare un plurirettangolo FINITO esterno P_2 e un plurir. FINITO interno P_1 con

$$P_1 \subset A \subset P_2 \quad \text{e} \quad |P_2| - |P_1| < \varepsilon$$

ALLORA $\partial A \subset P_2 \setminus P_1$ e $|P_2 \setminus P_1| = |P_2| - |P_1| < \varepsilon$

Dato che $\varepsilon > 0$ è arbitrario $\Rightarrow$

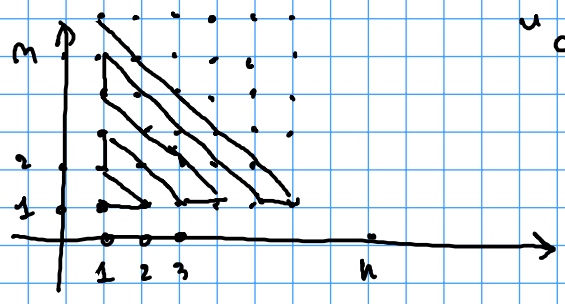
$$m_R(\partial A) = 0$$

IN REALTÀ esistono insiemi aperti di misura (Lebesgue) positiva

La costruzione di un tale insieme si basa sul fatto che l'insieme $\mathbb{Q} = \{\text{razionali}\}$ È NUMERABILE, cioè esiste una successione $n \mapsto q_n$ (da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$) tale che

$\forall q \in \mathbb{Q}$ $\exists n : q = q_n$ (q_n è suriettiva)

IDEA: "conto sulle diagonali"



$q_1 = (1,1)$ $q_2 = (2,1)$ $q_3 = (1,2)$

$q_4 = (2,2)$ ...

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ è in corrisp. con $\mathbb{N}$

Dato $\varepsilon > 0$ definisco $A_\varepsilon = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left] q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},\ q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right[$

INTERVALLI APERTI

A_ε è aperto in quanto unione (infinita) di aperti

$$|A_\varepsilon| \le \sum_{n=0}^{\infty} \left| q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\ q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon \sum_{n=0} \frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon}{1-\frac{1}{2}}$$

$$< 2\varepsilon$$

A_ε è un aperto di misura $< 2\varepsilon$ CHE CONTIENE $\mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \partial A_\varepsilon = \mathbb{R} \qquad |\partial A_\varepsilon| = +\infty$$

ESEMPIO (INSIEME DI CANTOR) FACCIO LA SEGUENTE COSTRUZIONE:

- PARTO DA $I = [0,1]$ E_0
- RIMUOVO L'INTERVALLO $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$ E_1
- DA OGNI INTERVALLO I DEL PASSO PRECEDENTE RIMUOVO UN INTERV. (AL CENTRO) DI AMPIEZZA $\frac{1}{3}|I|$ E_2
- CONTINUO COSÌ. CHIAMO $E = \bigcap E_n$ ← quello che rimane

E è detto insieme di CANTOR Ternario

SI VEDE CHE $E \neq \emptyset$ ANZI

$x \in E \iff x$ in base tre si scrive $0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1 \cdots \alpha_k \cdots$

$\alpha_k \in \{0,2\}$ (mai $\alpha_k = 1$)

(questo implica che E è "più che numerabile")

INOLTRE E è chiuso e $m(E) \Rightarrow$ perché

$$m(E) \le 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots \right) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = 1 - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= 1 - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1/3}$$

$$= 0$$

E è un insieme boreliano che però non è unione numerabile di punti

- FATTO: ANCHE LEBESGUE HA DEGLI INSIEMI NON MISURABILI

non riesce ad aver una teoria che misura tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$

Altre proprietà delle funzioni: CONFRONTO CON RIEMANN

FATTI (a) Se $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è continua $\Rightarrow$ f è misurabile

(a1) se Ω è un aperto limitato, e $f: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ f è integrabile su $\overline{\Omega}$

(b) Se f è integrabile secondo Riemann $\Rightarrow$ f è integrabile secondo Lebesgue e gli integrali coincidono

(questo ci dice che gli integrali unidimensionali su $[a,b]$ visti in Analisi 1 sono anche integrali nel senso di Lebesgue ($\Rightarrow$ tutte le tecniche di calcolo sono buone)

(c) Se $f \ge 0$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f integrabile secondo Riemann in senso improprio $\Rightarrow$ f integrabile secondo L. e gli integrali coincidono

$\downarrow$

Se f cambia segno

f assolutamente integrabile $\Rightarrow$ " "

in senso improprio secondo R.

NON È VERO CHE f INT. IN SENSO IMPROPRIO (Riem.)
$\Rightarrow$ f integrabile in Lebesgue

per esempio $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ è int. secondo R. in senso impropr. su $\mathbb{R}$

ma non è integrabile in Lebesgue

(c2) Se si pone da $\mathbb{R}^N$ è sempre vero (per i teoremi di limite) che
A_n successione di insiemi con $A_n \subset A_{n+1}$; $A = \bigcup A_n$
$f \geq 0$, f misurabile $\Rightarrow$

$$\int_A f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)$$ (anche valore $+\infty$)

(e il risultato non dipende dalla scelta degli A_n !)