Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 30 4/12/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

INTEGRALE ANZI LA MISURA di un'insieme sono dalla "formalizzazione" delle nozioni di AREA / (VOLUME) di una figura. Ci sono varie approcci per definire queste nozioni (e ci sono dei problemi)

PUNTO FERMO: Area dei rettangoli

DEFINIZIONI (a) Un INTERVALLO è un sottinsieme $I \subset \mathbb{R}$ tale che I ha una di queste forme

$I =]0,6[$, $I = [0,6[$, $I =]0,6]$, $I = [0,6]$

$I =]0, +\infty[$, $[0,+\infty[$, $]-\infty, 0[$, $]-\infty, 6]$

$I = \mathbb{R}$

(I è un generico sottinsieme CONVESSO di $\mathbb{R}$)

(NOTA CHE CONSIDERO ANCHE INTERVALLI ILLIMITATI)

(b) Chiamo N-RETTANGOLO un sottinsieme di $\mathbb{R}^N$ tale che

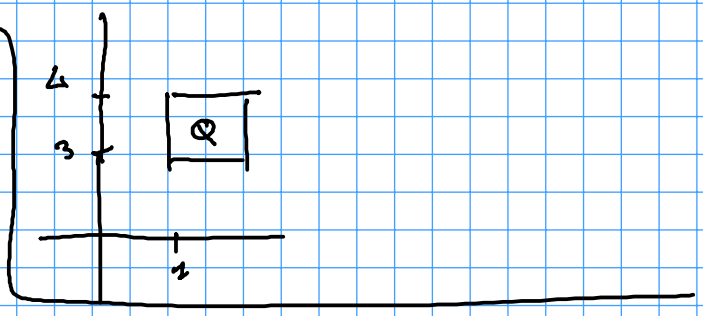
$R = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N$ I_j intervalli

$R =]0,1] \times [1, +\infty[$ è un rettangolo (illimitato)

$= \{ (x,y) : 0 < x \leq 1 \ , \ y \geq 1 \}$

$\mathbb{R}^N \rightarrow R = \{ (x_1, \dots, x_N) : x_1 \in I_1, \dots, x_N \in I_N \}$

$Q = [0,1] \times [3,4] = \{ 0 \leq x \leq 1, 3 \leq y \leq 4 \}$



Chiamo lunghezza di un intervallo I:

$\ell(I) = b - a = \sup I - \inf I$

(può essere $+\infty$ se I è illimitato)

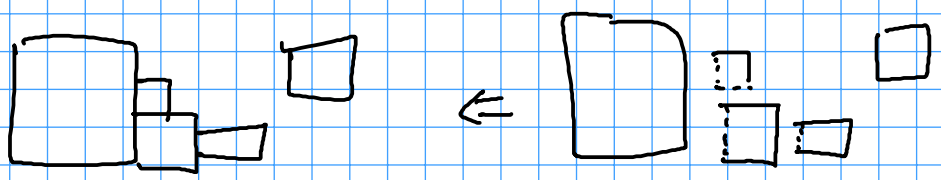
Dato un rettangolo $R = I_1 \times \dots \times I_N$ chiamo MISURA di R il numero

$$|R| = \ell(I_1) \cdot \ell(I_2) \cdot \dots \cdot \ell(I_N)$$

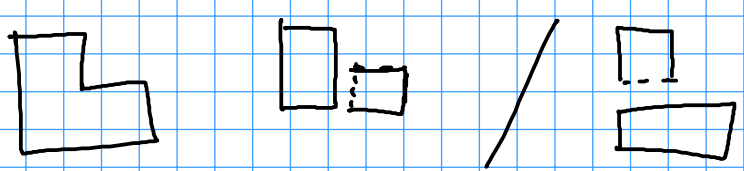
(modulo delle lunghezze dei "lati")

Def Chiamo (N-)"PLURIRETTANGOLO" un insieme $P \subset \mathbb{R}^N$ tale che esistono $R_1 \dots R_K$ rettangoli t.c.

$$P = R_1 \cup \dots \cup R_K \ , \ R_i \cap R_j = \phi$$



(la scomposizione di P in rettangoli NON è unica)



Def. Dato un plurirettangolo P pongo

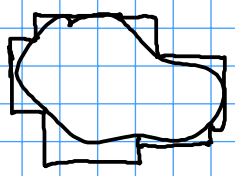
$$|P| = |R_1| + \dots + |R_k| \qquad (\text{MISURA DI } P)$$

Perché questa def. sia sensata bisogna dimostrare che $|P|$ non dipende dal modo in cui scompongo P come unione di rettangoli – SI FA –

Def. (Provvisoria) Dato $A \subset \mathbb{R}^N$ LIMITATO definisco la "misura esterna" e la "misura interna" di A secondo Riemann i due numeri (finiti):

$$m_R^*(A) = \inf \{ |P| : P \text{ plurirett. con } A \subset P \}$$

$$m_{R*}(A) = \sup \{ |P| : P \text{ plurirett. con } P \subset A \}$$



Dico A è misurabile secondo Riemann se $m_{R*}(A) = m_R^*(A)$.

In questo caso chiamo MISURA di A secondo Riem.

$$m_R(A) := m_{R*}(A) = m_R^*(A)$$

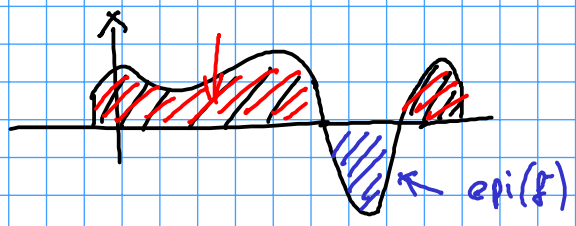
Def. Data una $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tale che

- f è LIMITATA
- supporto di f è LIMITATO $\left(\text{Dpt}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \right)$

Dico che f è integrabile secondo Riem. se

$\text{epi}(f^+)$ e $\text{epi}(f^-)$ sono misurabili secondo Riemann in $\mathbb{R}^{N+1}$

$$epi(f) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^N \ 0 \le y \le f(x)\}$$



$$f^+ = \max(f, 0)$$

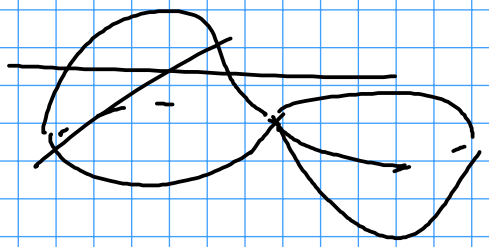
$$f^- = (-f)^+$$

$$f^+ - f^- = f \quad ; \quad f^+ + f^- = |f|$$

$$\left((1)^+ = 1 \quad (-3)^- = 3 \right) \qquad \left((-5)^+ = 0 \quad 3^- = 0 \right)$$

Se f è integrabile chiamo integrale di f

$$\int f(x)\,dx = m_R(epi(f^+)) - m_R(epi(f^-))$$



Def. Dato $A \subset \mathbb{R}^N$ misurabile e $f: A \to \mathbb{R}$ dico che f è integrabile su A se posto

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in A \\ 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^N \setminus A \end{cases}$$

questa $\tilde{f}$ è integrabile su $\mathbb{R}^N$. Scrivo

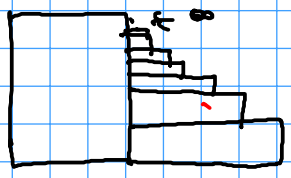
$$\int_A f(x)\,dx := \int_{(\mathbb{R}^N)} \tilde{f}(x)\,dx$$

UN DIFETTO DELLA MISURA FATTA IN QUESTO MODO È CHE "NON VA D'ACCORDO" CON I LIMITI

ESTENDIAMO LA DEF. DI MISURA MODIFICANDO LA DEF. DI PLURIRETTANGOLO

Def. Chiamo N-PLURIRETTANGOLO (numerabile) un insieme $P \subset \mathbb{R}^N$ tale che esiste una successione (R_n) di rettangoli con

$$P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n \qquad R_i \cap R_j \neq \emptyset \text{ se } i \neq j$$



Chiamo misura di P

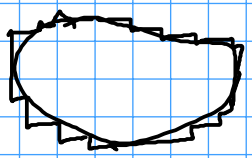
$$|P| := \sum_{n=1}^{\infty} |R_n| \quad \text{(può essere } +\infty\text{)}$$

(se P è limitato $|P| < +\infty$)

(Anche qui si può dim. che $|P|$ non dipende da come P è composto in rettangoli)

Def. Dato $A \subset \mathbb{R}^N$ introduco la misura esterna

$$m^*(A) := \inf \{ |P| : P \text{ plurirett. num.}, A \subset P \}$$



(non introduco la mis. esterna...)

DEF. (misurabilità) Dico che A è misurabile secondo Lebesgue se per ogni $E \subset \mathbb{R}^N$

$$m^*(A \cap E) + m^*(E \setminus A) = m^*(E)$$

(A "spezza bene" ogni insieme)

Se A è misurabile scrivo $A \in \mathcal{M}$ e

$$m(A) := m^*(A)$$

(misura di Lebesgue di A)

PROPRIETÀ (senza dimostrazione)

(1) Se P è un plurirettangolo $\Rightarrow$ $\boxed{P \in \mathcal{M}}$
e $m(P) = |P|$

(2) Se A_n è una successione di insiemi misurabili allora

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ sono misurabili

se $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$ si ha anche

$$\boxed{m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)}$$

(3) Se A, B misurab. anche $A \setminus B = \{x \in A, x \notin B\}$
è misurabile e $m(A \setminus B) = m(A) - m(A \cap B)$

(4) (segue da 3) Se $A \subset B$ $A, B \in \mathcal{M}$
$m(A) \leq m(B)$

Def. Dico che $A \subset \mathbb{R}^N$ è **TRASCURABILE** se $m^*(A) = 0$

PROP. (1) Se A è trascurabile $\Rightarrow A \in \mathcal{M}$
(e $m(A) = 0$)
(2) se $A \subset B$, B trascurabile $\Rightarrow A$ trascurabile
(3) Se $A_n \subset \mathbb{R}^N$ $n \in \mathbb{N}$, A_n trascurabile $\Rightarrow$

$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ è boscarobile

Per esempio $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ è razionale}\}$ è un insieme boscarobile.

NOTA Se $A = \mathbb{Q} \cap [0,1] = \{x \in [0,1], x \text{ razionale}\}$

$B = \{x \in [0,1], x \text{ irrazionale}\}$

$A \cup B = [0,1]$ $A \cap B = \emptyset$

$m_R^*(A) = 1 = m_R^*(B)$, $m_{*R}(A) = 0 = m_{*R}(B)$

A e B NON SONO MISURABILI PER Riemann

Per Lebesgue invece A e B sono misurabili

$m(A) = 0$ $m(B) = 1$ (A è boscarobile)

Def. Dico che una proprietà è vera "QUASI OVUNQUE" se è vera eccetto che per i punti di un insieme boscarobile.

Per ESEMPIO. Dico che $f \neq 0$ quasi ovunque se i punti x per cui $f(x) = 0$ formano un insieme boscarobile

---

Def (INTEGRALE). Sia $f: \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$

(a) Se $f \geq 0$ dico che f è misurabile se $\text{epi}(f)$ è un insieme misurabile di $\mathbb{R}^{N+1}$

Se $f \geq 0$ è misurabile chiamo INTEGRALE di f il numero eventualmente $+\infty$

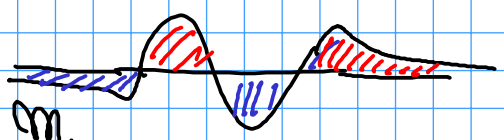
$$\int f(x)\,dx := m\left(\{(x,y) : x \in \mathbb{R}^N \quad 0 \le y \le f(x)\}\right)$$

$$\left(\in [0, +\infty]\right)$$

(Ho comodo poter parlare di integrale anche se può essere $+\infty$ — Lo posso FARE se $f \ge 0$ misurabile)

(b) Sia $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$ (senza ipotizzare $f \ge 0$)

Dico che f è misurabile se



$$epi(f^+) \text{ e } epi(f^-) \in \mathcal{M}$$

Se f è misurabile dico che f è INTEGRABILE se $epi(f^+)$ e $epi(f^-)$ hanno misura finita

e pongo $$\int f(x)\,dx := m(epi(f^+)) - m(epi(f^-)) \in \mathbb{R}$$

NOTA Le funzioni $f \ge 0$, misurabili hanno comunque l'integrale (ma possono non essere integrabili)

Per le funzioni che cambiano segno non si riesce a definire l'integrale se non nel caso in cui viene finito

DUNQUE Se f è misurabile

f integrabile $\iff$ $|f|$ integrabile

$\iff$ f^+, f^- integrabili

(secondo Lebesgue $\frac{\sin x}{x}$ NON è INTEGRABILE SU $\mathbb{R}$)

NON ho SUPPOSTO IN QUESTE DEFINIZIONI

NÉ CHE f sia limitata NÉ che abbia supporto limitato : l'integrale secondo Lebesgue è automaticamente "un integrale improprio"

Def Se $A \subset \mathbb{R}^N$ misurabile e $f: A \to [-\infty, +\infty]$ f misurabile dico che f è integrabile su A se

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$ è integrabile su $\mathbb{R}^N$

(si dimostra che $\tilde{f}$ è misurabile). Scrivo

$$\int_A f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x)\,dx$$

PROPRIETÀ (delle funzioni integrabili e dell'integrale)

$$f, g : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty] \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

(1) Se f e g sono misurabili $\Rightarrow$

$f+g$ e $f \cdot g$ sono misurabili

Se f, g sono integrabili $\Rightarrow$

$\lambda f + \mu g$ è integrabile e

$$\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$$

(ATTENZIONE : CONVENIAMO CHE $0 \cdot \infty = 0$: È UNA CONVENZIONE VALIDA IN QUESTO AMBITO . INVECE NON DEFINISCO $+\infty - \infty$. QUANDO dico che $f+g$ è misurabile intendo che qualunque valore io assegno a $+\infty - \infty$ la funzione somma è misurabile.

Quando dico che $f+g$ è integrabile sottointendo (LO DIG SUBITO) che

se f è integrabile $\Rightarrow$ i punti in cui $f(x) = \pm\infty$ sono un insieme trascurabile).

(b) se $0 \le f \le g$ quasi ovunque

f, g misurabili $\Rightarrow$

$$0 \le \int f \le \int g \quad (\le +\infty)$$

VICEVERSA se f misurabile, $f \ge 0$

$$\int f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \text{ quasi ovunque.}$$

(c) Se f è integrabile $\Rightarrow$

$\{x : |f(x)| = +\infty\}$ è trascurabile.

(d) se f misurabile (integrabile) e se

$g = f$ quasi ovunque $\Rightarrow$

g è misurabile (integrabile) e

$$\int f = \int g$$

(e) Se f è integrabile $\Rightarrow$

$$\left| \int f(x)\,dx \right| \le \int |f(x)|\,dx$$

(Sto sempre considerando l'integrale su tutto $\mathbb{R}^N$)

(f) se A e B sono misurabili disgiunti

e $f : A \cup B \to [-\infty, +\infty]$ allora

f è integrabile su $A \cup B \iff \begin{cases} f \text{ è integrabile su } A \\ f \text{ è integrabile su } B \end{cases}$

e $$\int_{A\cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$$