Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 29 29/11/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

ABBIAMO VISTO come studiare: max/min di una funzione f su un "vincolo" V definito da $\underbrace{g_1(x)=0 \dots g_m(x)=0}$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto — VINCOLI DI EGUAGLIANZA

Servono anche "vincoli di disuguaglianza"

Def. Chiamo VINCOLO REGOLARE UNILATERO (in Ω) un insieme V definito da

$$V = \{ x \in \Omega : g(x) \le 0 \}$$

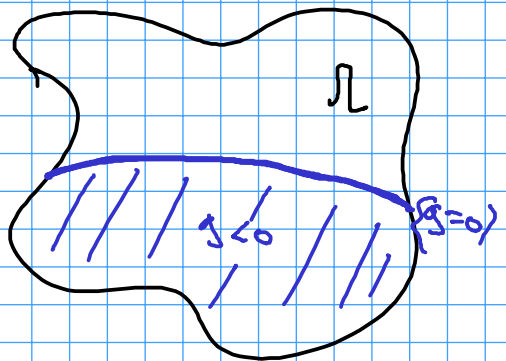
dove $g: \Omega \to \mathbb{R}$ (non avrebbe senso considerare $g: \Omega \to \mathbb{R}^m$ se $m \neq 1$)
di classe $C^1(\Omega)$ con la proprietà:

$$\nabla g(x) \neq \vec{0} \quad \text{per ogni } x \in \Omega : g(x) = 0$$

NOTA Sotto queste ipotesi

$$\mathring{V} = \{ x \in \Omega : g(x) < 0 \}$$

$$\left(\partial_\Omega V := \right) \partial V \cap \Omega = \{ x \in \Omega : g(x) = 0 \}$$



Teorema Dato $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $C^1(\Omega)$, dato V come sopra. Se $x_0 \in V$ pto di massimo (minimo) relativo per f su V $\Rightarrow$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$, se $g(x_0) < 0 \Rightarrow \lambda = 0$

Dim. Se $g(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è interno a $V \Rightarrow$ (Fermat)

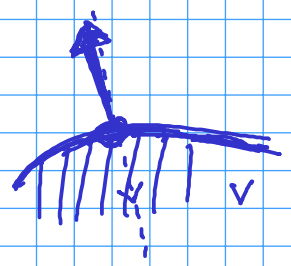
$\nabla f(x_0) = 0$ (quindi vale la tesi con $\lambda = 0$)

Se $g(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 \in \partial V$. È chiaro che x_0 è di massimo (minimo) rel. su $\partial V = \{g = 0\} \Rightarrow$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$

IN REALTÀ nel caso $g(x_0) = 0$ ho ottenuto solo il fatto che x_0 è di max (min) su ∂V. Se uso tutta l'ipotesi TROVO

$\lambda \geq 0$ nel caso del massimo ($\lambda \leq 0$ nel caso del minimo)



x_0 di max $\nabla f(x_0)$ deve puntare verso l'esterno di V

$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$

con $\lambda \geq 0$

ESEMPIO Cerco il $\max_D f$, $\min_D f$ dove

$$f(x,y) := 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 16x + 16y$$

$$D = \{ x^2 + y^2 \leq 4 \}$$

(qui $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$, $\Omega = \mathbb{R}^2$)

Uso il teorema appena enunciato:

$$\begin{cases} 10x - 6y - 16 = 2\lambda x \\ 10y - 6x + 16 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 \leq 4 \,, \quad \lambda(x^2 + y^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

CERCO PRIMA I PUNTI CON $x^2 + y^2 < 4$, $\lambda = 0$

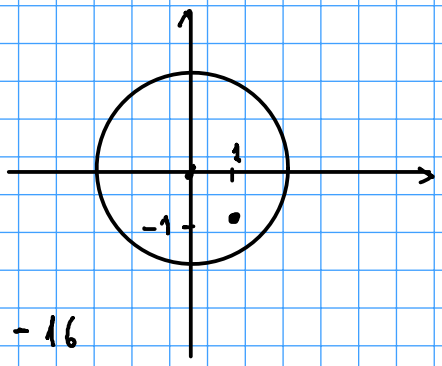
POI QUELLI CON $x^2 + y^2 = 4$

(a) PUNTI INTERNI (con $\lambda \neq 1$)

$$\begin{cases} 10x - 6y = 16 \\ -6x + 10y = -16 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$$

$(\det \ 100 - 36 \neq 0)$

sol $= (1, -1)$ (verifica $x^2 + y^2 < 4$



$f(1,-1) = 5 + 5 + 6 - 16 - 16$

$= \boxed{-16}$

$5x^2 + 5y^2 - 6xy - 16x + 16y$

(b) PUNTI SULLA FRONTIERA

$$\begin{cases} (10 - 2\lambda)x - 6y = 16 \\ -6x + (10 - 2\lambda)y = -16 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

($10 - 2\lambda \neq 0$, se fosse $10 - 2\lambda = 0$

AVREI $-6y = 16$, $-6x = -16$

$x^2 + y^2 = 4$

$y = -\frac{8}{3}$ $x = \frac{8}{3}$ $x^2 + y^2 = \frac{2 \cdot 64}{9} \neq 4$)

BISOGNA RICAVARE x e y dalle prime due (in termini di λ)

$$\begin{cases} (10 - 2\lambda)6x - 36y = 96 \\ -(10 - 2\lambda)6x + (10 - 2\lambda)^2 y = -16(10 - 2\lambda) \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} Ax - 6 = 16 \\ -6x + Ay = -16 \end{cases}$$

$$y = \frac{96 - 16(10 - 2\lambda)}{(10 - 2\lambda)^2 - 36} = \frac{96 - 16A}{A^2 - 36}$$

$$\boxed{A = (10 - 2\lambda)}$$

$$x = \frac{1}{6}(Ay + 16) = \frac{1}{6}\left(\frac{96A - 16A^2 + 16(A^2 - 36)}{A^2 - 36}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{96A - 16 \cdot 36}{A^2 - 36}\right)$$

$$\frac{16A - 96}{A^2 - 36}$$

DOVREI IMPORRE

$$\left(\frac{96 - 16A}{A^2 - 36}\right)^2 + \left(\frac{16A - 96}{A^2 - 36}\right)^2 = 4 \iff$$

$$\frac{96 - 16A}{A^2 - 36} = \sqrt{2} \qquad 96 - 16A - \sqrt{2}A^2 + \sqrt{2} \cdot 36 = 0$$

TROVO 2 valori di A che

corrispondono ad uno dei punti critici (vincolati)

TRA I TRE PUNTI TROVO IL MAX e il MIN (..)

CASO GENERALE (vincoli di eguaglianza e disuguaglianza insieme)

Teorema Supponiamo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $C^1(\Omega)$

$g_1 \dots g_M, h_1 \dots h_K : \Omega \to \mathbb{R}$ e poniamo:

$$V = \{x \in \Omega : \underbrace{g_1(x) = \dots = g_M(x) = 0}_{M \text{ EGUAGLIANZE}}, \underbrace{h_1(x) \le 0, \dots, h_K(x) \le 0}_{K \text{ DISUGUAGLIANZE}}\}$$

IPOTESI (Regolarità / trasversalità):

⊗ SE $x_0 \in \Omega$ e se $i_1 \dots i_R \in \{1 \dots K\}$ è TALE CHE

$$g_1(x_0) = \dots g_M(x_0) = h_{i_1}(x_0) = \dots = h_{i_R}(x_0) = 0$$

i vettori $\nabla g_1(x_0) \dots \nabla g_M(x_0), \nabla h_{i_1}(x_0), \dots \nabla h_{i_R}(x_0)$

sono linearmente indipendenti

(NON MI INTERESSANO LE h_j dove $h_j(x_0) < 0$, R può essere 0)

N=0 se non ci sono vincoli di eguaglianza, M=0 se non ci sono disuguaglianze

SE $x_0 \in V$ ed è di max (min) per f su $V \Rightarrow$

$\exists \lambda_1 \dots \lambda_M, \mu_1 \dots \mu_K$ tali che

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_M \nabla g_M(x_0) + \mu_1 \nabla h_1(x_0) + \dots + \mu_K \nabla h_K(x_0) \quad (\star\star)$$

e $\mu_j = 0$ se $h_j(x_0) < 0$

INOLTRE se x_0 è pto di $\max$ ($\min$) $\mu_j \geq 0$ ($\mu_j \leq 0$)

(NO DIM).

Questo teorema si può esprimere in termini di soli punti critici liberi se INTRODUCO DELLE VARIABILI:

DEF Date f e $g_1 \dots g_M$, $h_1 \dots h_K$ COME PRIMA (derivabili $\mathcal{C}^1$)
INTRODUCO LA "LAGRANGIANA"

$$\mathcal{L}(x, \vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\delta}) := f(x) - \sum_{i=1}^{M} \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^{K} \mu_j \left(h_j(x) + \delta_j^2\right)$$

$$\left(x \in \Omega,\ \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^M,\ \vec{\mu} \in \mathbb{R}^K,\ \vec{\delta} \in \mathbb{R}^K\right)$$

FATTO $(x_0, \vec{\lambda}, \vec{\mu})$ verifica $(\star\star) \iff$

$\exists\, \vec{\delta}$: $(x_0, \vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\delta})$ è pto critico per $\mathcal{L}$

dove $\delta_j^2 = -h_j(x_0)$

DIM. Facciamo tutte le possibili derivate di $\mathcal{L}$.

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu, \delta) = \nabla f(x) - \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \nabla g_i(x) - \sum_{j=1}^{K} \mu_j \nabla h_j(x) \quad (1)$$

$$\left(\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_N} \end{matrix}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu, \delta) = \left(g_1(x), \dots, g_M(x)\right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\mu} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu, \delta) = \left(h_1(x) + \delta_1^2, \dots, h_K(x) + \delta_K^2\right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu, \delta) = 2\left(\mu_1 \delta_1, \dots, \mu_K \delta_K\right) \quad (4)$$

Se eguaglio tutto a zero:

(1) $\Rightarrow$ (**)

(2) $\Rightarrow$ $g_1(x_0) = g_2(x_0) = \dots = g_M(x_0) = 0$

(3) $\Rightarrow$ $h_1(x_0) = -\delta_1^2 \le 0 \dots h_K(x_0) = -\delta_K^2 \le 0$ $\Big\}$ $x_0 \in$ VINCOLO

(4) $\Rightarrow$ $\mu_1 \delta_1 = \mu_2 \delta_2 = \dots = \mu_K \delta_K = 0$ quindi

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $h_j(x_0) < 0 \iff \delta_j \neq 0 \Rightarrow \mu_j = 0$

QUESTO "ARTIFICIO" PERMETTE DI RICONDURRE LA RICERCA DEI MAX/MIN VINCOLATI ALLA RICERCA DEI MAX/MIN LIBERI (DELLA LAGRANGIANA)

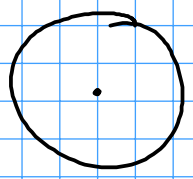
DEFINIZIONI (che serviranno più avanti)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, aperto. Dico che Ω è un <u>DOMINIO REGOLARE</u> se $\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^N : g(x) < 0 \}$ dove $g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ di classe C^1 con $\nabla g(x) \neq \vec{0}$ dove $g(x) \ge 0$

<u>OSS</u> Non tutti gli aperti sono domini regolari; per esempio

$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1 \}$ è aperto

$\Omega = \{ x^2 + y^2 = 1 \} \cup \{ (0,0) \}$



<u>FATTO</u> Se Ω è un dominio regolare

$\bar{\Omega} = \{ g(x) \le 0 \}$ $\quad \partial\Omega = \{ g(x) = 0 \}$

Posso definire lo "normale unitario USCENTE" in ogni $x \in \partial\Omega$

$$\hat{\nu}(x) = \frac{\nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|}$$

NOTA Se g_1 ha le stesse proprietà $\Rightarrow$ $\underbrace{\nabla g_1 = \lambda \nabla g \text{ con } \lambda > 0}$
e quindi le $\hat{\nu}_1, \hat{\nu}$ sono la stessa

(si deduce dal teor. dei moltiplicatori

HO SELEZIONATO UN VERSO TRA LE NORMALI A $\partial\Omega$

DEF. Dico che Ω è un DOMINIO REGOLARE A TRATTI SE

$$\Omega = \{ g_1(x) < 0, \dots, g_M(x) < 0 \}$$

dove $g_1 \dots g_M : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, sono C^1 e se

$$g_{i_1}(x_0) = \dots = g_{i_k}(x_0) = 0$$

$\Rightarrow$ $\nabla g_{i_k}(x), \dots, \nabla g_{i_k}(x_0)$ sono lin. indip.

(in particolare ogni $\nabla g_i(x_0) \neq 0$ se $g_i(x_0) = 0$)

PER ESEMPIO $\Omega = \{ \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - 1}_{g_1} < 0, \underbrace{z}_{-g_2} > 0 \}$

Se Ω è regolare a tratti $\Rightarrow$ $(\Omega = \{ g_1 < 0, \dots g_M < 0 \})$

$\partial\Omega = \{ g_1 = 0 \} \cup \dots \cup \{ g_M = 0 \}$

le altre ≤ 0

Nella frontiera ci sono M "pezzi"

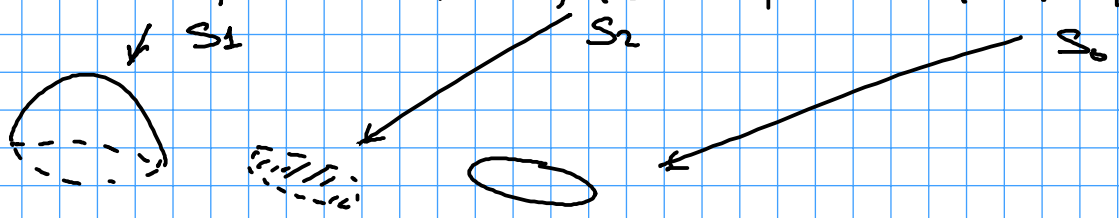
$\{ g_j(x) = 0, \ g_i(x) < 0 \text{ se } i \neq j \}$ + altro robo

qui esiste la normale $\frac{\nabla g_j(x)}{\|g_j(x)\|}$

SONO POCHI PUNTI

Nell'esempio $\{ \underbrace{x^2+y^2+z^2-1}_{g_1} < 0 \,,\, \underbrace{-z}_{g_2} < 0 \} = \Omega$

$\partial\Omega = \{x^2+y^2+z^2=1,\ z>0\} \cup \{x^2+y^2+z^2<1,\ z=0\} \cup \{x^2+y^2=1,\ z=0\}$



IN S_1 la normale è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

IN S_2 la normale = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

S_0 è "UNO SPIGOLO"