Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 25 21/11/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

$f(x,y,z) = xyz$ su $V = \{x^2+y^2+z^2=1,\ x+y-z=0\}$

$\Downarrow$ (MOLTIPLICATORI ... vedi Lezione di ieri)

$$\begin{cases} y-x = 3xy(x-y) \\ z+x = 3xz(x+z) \\ x^2+y^2+z^2=1,\ x+y-z=0 \end{cases} \leftrightarrow (S) \begin{cases} (y-x)(1+3xy)=0 \\ (z+x)(1-3xz)=0 \\ x^2+y^2+z^2=1,\ x+y-z=0 \end{cases}$$ quattro possibilità

(1) $\begin{cases} y=x \\ z=-x \\ x^2+x^2+x^2=1,\ x+x+x=0 \end{cases}$ IMPOSSIBILE

(2) $\begin{cases} y=x \\ 3xz=1 \\ 2x^2+z^2=1,\ z=2x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ 6x^2=1 \\ 6x^2=1,\ z=2x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1/\sqrt{6} \\ y=x,\ z=2x \end{cases}$ $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

(3) $\begin{cases} 3xy=-1 \\ z=-x \\ x^2+y^2+x^2=1,\ y=-2x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -6x^2=-1 \\ z=-x,\ y=-2x \\ 6x^2=1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1/\sqrt{6} \\ y=-2x \\ z=-1 \end{cases}$ $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

(4) $\begin{cases} 3xy=-1 \\ 3x z=1 \\ z=x+y,\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 3xy=-1 \\ 3x(x+y)=1 \\ z=x+y,\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \leftrightarrow 3x^2+3xy=1 \quad 3x^2=2$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \pm\sqrt{6}\, y = -1 \quad \leftrightarrow \quad y = \mp \frac{1}{\sqrt{6}} \\ z = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \pm\left(\frac{2-1}{\sqrt{6}}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}, \quad \underbrace{x^2+y^2+z^2 = 1}$$

$$\pm\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4+1+1}{6}$$

$$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \qquad \pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \qquad \pm\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

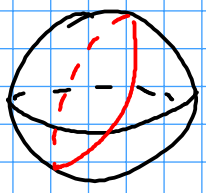
TUTTI I PUNTI STAZIONARI VINCOLATI

Su questi punti f vale $\pm \dfrac{2}{6\sqrt{6}} = \pm \dfrac{1}{3\sqrt{6}}$

Da cui si deduce che

$$\max_V xyz = \frac{1}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{18}, \quad \min_V xyz = -\frac{1}{3\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{18}$$

SI POTREBBE, IN QUESTO ESEMPIO, USARE UN ALTRO SISTEMA: DESCRIVERE IL VINCOLO V "IN FORMA PARAMETRICA", in questo V = sostegno di una curva γ.



V = sfera unitaria $\cap$ piano

$\downarrow$

circonferenza che vorrei descrivere mediante una curva.

CONVIENE TROVARE UNA BASE ORTONORMALE NEL PIANO $\pi = \{x+y-z=0\}$

cioè devo 2 vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \pi$, con $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = 1$

$x+y-z=0$ per esempio è vera per $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; se lo voglio di norma 1

$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dopo di che cerco $\vec{v}_2 \in \pi$, $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_1$

$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} z=2x \\ x=y \end{cases}$ per esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; dato che lo voglio di norma 1

$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La circonferenza che cerco è data da

$$\gamma(t) = \vec{v}_1 \cos(t) + \vec{v}_2 \sin(t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

INFATTI $\gamma(t) \in \pi$ (perché $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono in π)

$$\|\gamma(t)\|^2 = \underbrace{\|\vec{v}_1\|^2}_{=1} \cos^2(t) + 2 \underbrace{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}_{=0} \cos(t)\sin(t) + \underbrace{\|\vec{v}_2\|^2}_{=1} \sin^2(t) = 1$$

Si vede che $\gamma(t)$ percorre tutti i punti di V (...)

ALLORA POSSO CONSIDERARE

$$\varphi(t) = f(\gamma(t)) \quad \leftarrow \quad \max_{[0,2\pi]} \varphi = \max_{V} f \;/\; \min_{[0,2\pi]} \varphi = \min_{V} f$$

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) + \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin(t) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin(t) \\ \frac{2}{\sqrt{6}}\sin(t) \end{pmatrix} \Big\} \gamma(t)$$

$$f(\gamma(t)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin(t)\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin(t)\right)\frac{2}{\sqrt{6}}\sin(t) =$$

$$\left(\frac{1}{6}\sin^2(t) - \frac{1}{2}\cos^2(t)\right)\frac{2}{\sqrt{6}}\sin(t) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{3}\sin^2(t) + \sin^2(t) - 1\right)\sin(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{6}}\left(\frac{4}{3}\sin^2(t) - 1\right) =$$

$$\frac{\sin(t)}{3\sqrt{6}}\left(4\sin^2(t) - 3\right) \quad \leftarrow \text{DEVO TROVARE I PT CRITICI DI } \varphi \ldots$$

$$= \psi(\sin(t)) \quad \text{con} \quad \psi(s) = \frac{s}{3\sqrt{6}}(4s^2 - 3) = \frac{4s^3 - 3s}{3\sqrt{6}}$$

$$\varphi'(t) = \psi'(\sin(t)) \cdot \cos(t) = \frac{12s^2 - 3}{3\sqrt{6}}\Big|_{s=\sin(t)} \cdot \cos(t)$$

$\varphi'(t) = 0 \iff \cdot \cos(t) = 0$ oppure:

$\cdot \sin(t) = \mp \frac{1}{2}$ $\quad \left(12s^2 = 3 \rightarrow s^2 = \frac{1}{4} \rightarrow s = \mp\frac{1}{2}\right)$

- $\cos(t)=0$ implica $\sin(t)=\pm 1$ $\Rightarrow$

$$\gamma(t)=\pm\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{6}\\ 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

- $\sin(t)=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\cos(t)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; lo metto in $\gamma(t)$ trovo

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{6}}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2\sqrt{6}}+\frac{1}{2\sqrt{6}}\\ -\frac{3}{2\sqrt{6}}+\frac{1}{2\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{6}}\\ +\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

- $\sin(t)=-1$ .... ALLA FINE RITROVO GLI STESSI PUNTI ..