Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 27 27/11/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto $\quad g: \Omega \to \mathbb{R}^M \quad M < N \quad$ di classe C^1

$$V = \{ x \in \Omega : g(x) = 0 \}$$

IPOTESI In ogni $x \in V$ $Jg(x)$ ha rango M

(dico che V è un vincolo (bilatero) regolare)

Def. Lo spazio tangente a V in un punto $x_0 \in V$ è (l'insieme di tutte le direzioni tangenti, che risulta essere)

$$T_V(x_0) = \mathrm{Ker}\left(Jg(x_0) \right)$$

Lo spazio normale a V in x è $N_V(x_0) : (T_V(x_0))^{\perp}$ che risulta essere:

$$N_V(x_0) = \underset{(\text{RANGO})}{\text{Immagine}}\left(Jg(x_0)^t \right) = \boxed{\text{span}\left(\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_M(x_0) \right)}$$

(di dimensione M)

dove $g = (g_1, \dots, g_M)$

L'eguaglianza sopra segue da:

$$\mathrm{IMM}\left(J_g(x_0)^t\right) = \left\{ J_g(x_0)^t \vec{\lambda} \,,\ \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^M \right\} =$$

$$\left\{ \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_M \nabla g_M(x_0) \,,\ \lambda_1 \dots \lambda_M \in \mathbb{R} \right\}$$

dato che $J_g(x_0)^t = \left(\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_M(x_0) \right)$ matrice $N \times M$

NOTA (a) Se $M = 1$ – CODIMENSIONE 1 ho

$g: \Omega \to \mathbb{R}$. (IPOTESI DIVENTA $\nabla g(x) \neq 0 \quad \forall x \in V$)

$N_V(x_0) = \{ \lambda \nabla g(x_0) \,,\ \lambda \in \mathbb{R} \}$ $(x_0 \in V)$

$T_V(x_0) = \ker g(x_0) = \nabla g(x_0)^{\perp}$

$(\dim(V) = N-1)$

(b) Se V è un vincolo regolare di codimensione M

$\Rightarrow V = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_M$

dove $V_i = \{ g_i(x) = 0 \}$ (di codimensione 1)

IN QUESTO CASO L'IPOTESI SI PUÒ ESPRIMERE:

$\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_M(x)$ sono linearmente indipendenti $\forall x \in V$

(i vincoli $V_1 \dots V_M$ si "intersecano trasversalmente")

Dato $f: \Omega \to \mathbb{R}$ voglio trovare i max/min Rel. per f su V.

Teorema Dato V vincolo regolare di codim M in Ω, dato g che definisce V, dato $f: \Omega \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in V$ tale che x_0 è di massimo/minimo relativo per f su V,

ALLORA

$\nabla f(x_0) \in N_V(x_0)$ cioè

$\exists \lambda_1 \dots \lambda_M \in \mathbb{R}$ tali che $\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_M \nabla g_M(x_0)$

(i λ_i si chiamano "moltiplicatori di Lagrange")

DEF. I punti $X \in V$ tali che $\nabla f(x) \in N_V(x)$ si dicono "punti critici (stazionari) vincolati per f su V"

Dunque il teorema dice che

x_0 di max/min rel. su $V \Rightarrow x_0$ critico vincolato per f su V

Dim. Supponiamo x_0 di max (per esempio)

Prendiamo una direzione tangente a V in x_0, $\vec{v}$

Allora esiste $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V$ con $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(x_0) = \vec{v}$

Dato che x_0 è di max per f su $V \Rightarrow$

0 è punto di massimo per $\varphi(t) = f(\gamma(t))$

($\varphi(0) = f(x_0) \geq f(\gamma(t)) = \varphi(t)$ se $-\varepsilon < t < \varepsilon$)

$\Rightarrow \varphi'(0) = 0$. Ma

$$\varphi'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \quad ; \text{ metto } t = 0$$

$$0 = \varphi'(0) = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \nabla f(x_0) \cdot \vec{v}$$

DUNQUE $\nabla f(x_0) \perp \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in T_V(x_0)$

$\Updownarrow$ (def. di spazio normale)

$\nabla f(x_0) \in N_V(x_0)$

$\Updownarrow$ (per quanto detto)

$\nabla f(x_0) \in \text{Span}(\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_n(x_0))$ #

ESEMPI

$f(x,y) = xy \qquad g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1$

$(\Omega = \mathbb{R}^2) \qquad E = \{ x^2 + 4y^2 = 1 \} = \{ g(x,y) = 0 \}$

VOGLIO TROVARE

$\max_E f$, $\min_E f$ | ✗ ESISTONO PER WEIERSTRASS:

(✓) E è chiuso dato da g è continua (e allora $\{ X : g(X) = 0 \}$ (o anche $\{ X : g(x) \leq 0 \}$) CHIUSO

E è limitato perché $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} g(x,y) = +\infty$ dato che

$g(x,y) \geq x^2 + y^2 \to +\infty$ se $x^2+y^2 \to +\infty$

Usando il teorema vediamo che i "candidati" punti di max/min devono verificare $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$

per un $\lambda \in \mathbb{R}$, cioè:

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} \qquad (+ \text{ condizione } x^2+4y^2=1)$$

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 8\lambda y \\ x^2+4y^2=1 \end{cases}$$

λ deve essere $\neq 0$;

$y = 2\lambda\, 8\lambda\, y \quad y = 16\lambda^2 y$

da cui o $y=0$ oppure

$16\lambda^2 = 1$

Se $y=0 \Rightarrow x=0$ IMPOSSIBILE per il III° cond.

DUNQUE $\lambda = \pm 1/4$. Risolvo il sistema:

$$\begin{cases} y = \pm \dfrac{x}{2} & \lambda = \pm 1/4 \\ x = \pm 2y \quad (\text{ripetizione del I°}) \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$$

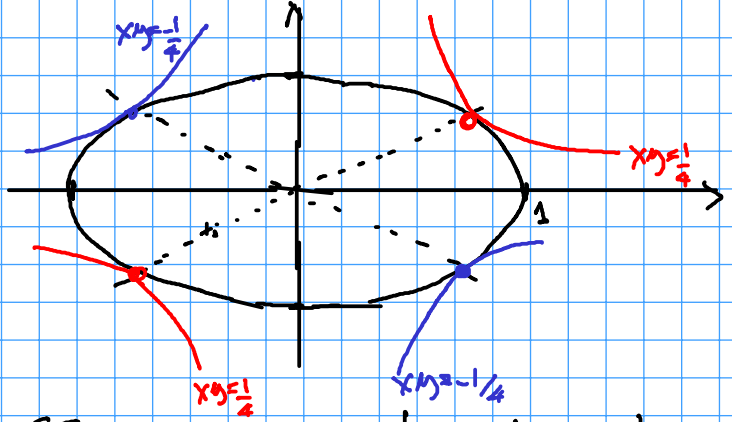
$$\begin{cases} x = \mp 2y \\ 4y^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \mp 2y \\ y = \pm \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

QUATTRO PUNTI STAZIONARI VINCOLATI

$\left(\pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \right)$ su cui f vale $\begin{cases} \frac{1}{4} & x,y \text{ concordi} \\ -\frac{1}{4} & x,y \text{ discordi} \end{cases}$

DUNQUE

$$\max_{x^2+4y^2=1} xy = \frac{1}{4}, \quad \min_{x^2+4y^2=1} xy = -\frac{1}{4}$$



$xy = \frac{1}{4}$ deve essere tangente all'ellisse

OSS. La def. di pto solz. vincolato dice che se $x_0 \in V = \{g=0\}$, x_0 è solz. vincolato per f su V

$\Rightarrow$ le linee di livello $\{f = f(x_0)\}$ e le linee di livello $\{g(x)=0\}$ sono **tangenti**

ESEMPIO $f(x,y) = x+y$ sul vincolo V dato da $g(x,y) = x^2+y^2-4x-4y-1 = 0$

Applico il teorema dei moltiplicatori:

$$\begin{cases} 1 = \lambda(2x-4) \\ 1 = \lambda(2y-4) \\ x^2+y^2-4x-4y = 1 \end{cases}$$

$\lambda \neq 0$ (se no $1=0$)

DIFFERENZA TRA I° e II°

$\lambda(2x-4) = \lambda(2y-4)$

$\Rightarrow x = y$

$$\begin{cases} x = y \\ 1 = \lambda(2x-4) \quad \text{(poco interessante, mi dà } \lambda) \\ x^2+x^2-4x-4x = 1 \end{cases}$$

$2x^2 - 8x - 1 = 0 \qquad x = \frac{4 \pm \sqrt{16+2}}{2} = \frac{4 \pm 3\sqrt{2}}{2}$

DUE PTI STAZ. VINC. $\frac{4+3\sqrt{2}}{2}(1,1)$, $\frac{4-3\sqrt{2}}{2}(1,1)$

su cui devo calcolare $f \Rightarrow$

$\max_V f = 4+3\sqrt{2}$, $\min_V f = 4-3\sqrt{2}$

$\left(2x^2-8x-1=0 \qquad x = \frac{+8 \pm \sqrt{64+8}}{4} = \dots \right)$

ESEMPIO $f(x,y,z) = xyz$ su $\{x^2+y^2+z^2 = 1\}$

$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$. TROVO

$$\begin{cases} yz = 2\lambda x \\ xz = 2\lambda y \\ xy = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

MOLTIPLICO LA I^a per x, LA I^a per y, LA III^a per z } SOMMO

$3xyz = xyz + xyz + xyz =$

$2\lambda(\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{=1}) = 2\lambda$

$$\begin{cases} (2\lambda = 3xyz) \\ yz = 3x^2yz \\ xz = 3xy^2z \\ xy = 3xyz^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} yz(1-3x^2) = 0 \\ xz(1-3y^2) = 0 \\ xy(1-3z^2) = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

Se $y=0$ $\begin{cases} 0=0 \\ xz=0 \\ 0=0 \\ x^2+z^2=1 \end{cases} \Longleftrightarrow$ $x=y=0$ $z=\pm 1$ OPPURE $y=z=0$ $x=\pm 1$

Se $z=0$ $\begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \\ xy=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ $z=x=0$ $y=\pm 1$; $z=y=0$ $x=\pm 1$

Se $x=0$ $\begin{cases} yz=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \\ y^2+z^2=1 \end{cases}$ $x=y=0$ $z=\pm 1$; $x=z=0$ $y=\pm 1$

$(0,0,\pm 1)$ $(0,\pm 1,0)$ $(\pm 1,0,0)$ TIPO (A)

Se no $x\neq 0$ / $y\neq 0$ / $z\neq 0$ $\Rightarrow x^2=y^2=z^2=\frac{1}{3}$

$(x,y,z) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ TIPO B

NEI PUNTI (A) $f = 0$ (PROBABILI SELLE - - - - NO DIM.)

NEI PUNTI (B) $f = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}$ $\max_V f = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ $\min_V f = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$

ESEMPIO $V = \{ x^2+y^2+z^2 = 1,\ x+y-z = 0 \}$

$f(x,y,z) = xyz$

IMPOSTIAMO IL PROBLEMA: IL TEOR. DEI MOLT. $\Rightarrow$

$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$ $\qquad g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$g_2 = x+y-z$

ANDREBBE CONTROLLATO CHE VALGA L'IPOTESI:

∇g_1 e ∇g_2 linearmente indip. nei punti di V ⊗

$\nabla g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$ $\qquad \nabla g_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

* Se fossero dipendenti $\quad 2x=\lambda,\ 2y=\lambda,\ 2z=-\lambda \quad x=y=-z$

MA ALLORA $x+y-z = x+x+x = 3x \Rightarrow x=0=y=z$

e $g_1(0,0,0) = -1 \neq 0$ NON È POSSIBILE !!

DUNQUE TROVO IL SISTEMA

$$\begin{cases} yz = 2\lambda x + \mu \\ xz = 2\lambda y + \mu \\ xy = 2\lambda z - \mu \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+y = z \end{cases}$$

MOLTIPLICO LA I° PER x, LA II° PER y, LA III PER z e SOMMO

$3xyz = 2\lambda \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{=1} + \mu \underbrace{(x+y-z)}_{=0}$

$3xyz = 2\lambda$

METTO $\boxed{2\lambda = 3xyz}$

$$\begin{cases} yz = 3x^2yz + \mu \\ xz = 3xy^2z + \mu \\ xy = 3xyz^2 - \mu \\ x^2+y^2+z^2=1,\ z=x+y \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu = yz(1-3x^2) & \text{I°} \\ \mu = xz(1-3y^2) & \text{II°} \\ \mu = -xy(1-3z^2) & \text{III°} \\ x^2+y^2+z^2=1,\ z=x+y \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz(1-3x^2) = xz(1-3y^2) & (\text{I}-\text{II}) \\ yz(1-3x^2) = -xy(1-3z^2) & (\text{I}+\text{III}) \\ x^2+y^2+z^2=1,\ z=x+y \end{cases}$$

$z=0$ $\begin{cases} 0=0 \\ xy=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$; $0=x+y$ IMPOSSIBLE

$y=0$ $\begin{cases} xz=0 \\ 0=0 \\ x^2+z^2=1 \end{cases}$; $z=x$ IMPOSSIBLE

$$\begin{cases} y(1-3x^2) = x(1-3y^2) \\ z(1-3x^2) = -x(1-3z^2) \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \quad , \; z=x+y \qquad (I-II) \quad (I+III) \quad z\neq 0 \quad y\neq 0$$

$$\begin{cases} y-3x^2y = x-3xy^2 \\ z-3x^2z = -x+3xz^2 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \quad , \; z=x+y \qquad \begin{cases} y-x = 3xy(x-y) \\ z+x = 3xz(x+z) \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \quad , \; z=x+y$$

TO BE CONTINUED....