Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 26 22/11/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Teorema delle funzioni implicite (DINI) Ω aperto di $\mathbb{R}^{N+M}$

Se $g: \Omega \to \mathbb{R}^M$ è di classe C^1. Se $(x_0, y_0) \in \Omega$ $(x_0 \in \mathbb{R}^N, y_0 \in \mathbb{R}^M)$

e se $\boxed{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ è invertibile}}$ (ha determinante $\neq 0$) allora

$\exists\, \rho > 0 \ \exists\, \rho_1 > 0 \ \exists\, f: B_N(x_0, \rho) \to B_M(y_0, \rho_1)$ tale che

$$\{(x,y) : g(x,y) = 0_M,\ \|x - x_0\| < \rho,\ \|y - y_0\| < \rho_1\}$$

$$\|$$

$$\{(x,y) : \|x - x_0\| < \rho,\ y = f(x)\}$$

$$\left(\mathcal{M} := \{(x,y) \in \Omega : g(x,y) = 0_M\} = \left\{ (x_1 \dots x_N\, y_1 \dots y_M) : \begin{cases} g_1(x_1 \dots x_N, y_1 \dots y_M) = 0 \\ \vdots \\ g_M(x_1 \dots x_N\, y_1 \dots y_M) = 0 \end{cases} \right\} \right.$$

OSS. Se $M = 1$ il teorema diventa:

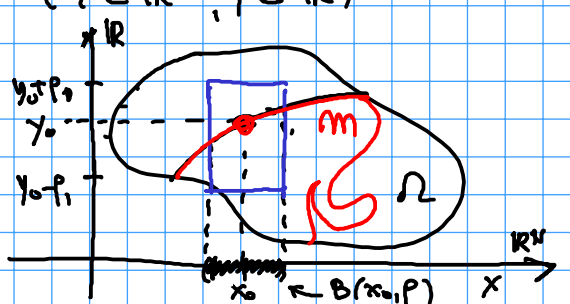
$\Omega \in \mathbb{R}^{N+1}$ $\quad g: \Omega \to \mathbb{R}$ e prendo

$\mathcal{M} := \{(x,y) \in \Omega : g(x,y) = 0\}$ $\quad (x \in \mathbb{R}^N, y \in \mathbb{R})$

Se $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}$ e se $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

allora $\exists\, \rho > 0$ $\rho_1 > 0$ e una

funzione $f: B(x_0, \rho) \to]y_0 - \rho_1, y_0 + \rho_1[$



tali che:

rettangolo

$$M \cap B(x_0,\rho) \times]y_0-\rho_1, y_0+\rho_2[= \text{grafico di } f =$$

$$\{(x,y): \ x \in B(x_0,\rho) \qquad y = f(x)\}$$

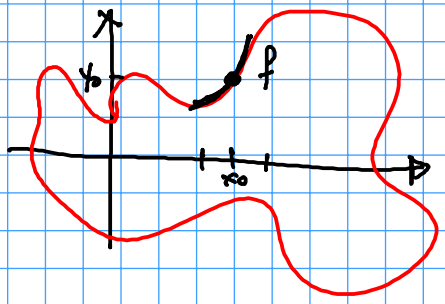
Se $M = N = 1$ (Teorema del Dini classico)

$g(x,y)$ di classe C^1

$$M = \{(x,y): \ g(x,y) = 0\}$$

Se $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \delta>0, \exists \varepsilon>0 \ \exists \ f:]x_0-\delta, x_0+\delta[\to]y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon[$

$$M \cap \left( ]x_0-\delta, x_0+\delta[\times]y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon[\right) = \text{grafico di } f$$



QUESTI TEOREMI SI POSSONO GENERALIZZARE.

- Nel caso generale basta che $\frac{\partial g}{\partial P}(P_0)$ abbia M colonne indipendenti cioè abbia un minore MxM con determinante $\neq 0$

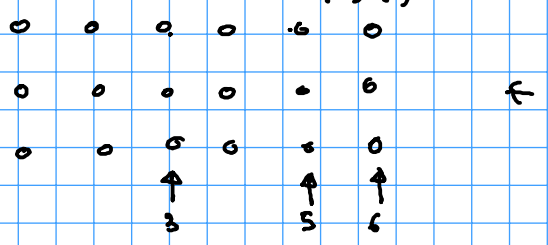
IN ALTRI TERMINI basta che $\frac{\partial g}{\partial P}(P_0)$ abbia "RANGO MASSIMO"

$\Leftrightarrow$ le M righe di $\frac{\partial g}{\partial P}(P_0)$ siano indipendenti $\Rightarrow$

$\exists \ i_1 \dots i_M$ tali che $\frac{\partial g}{\partial (x_{i_1} \dots x_{i_M})}(P_0)$ invertibile $\Rightarrow$ posso esplicitare $x_{i_1} \dots x_{i_M}$ in termini delle altre

$\frac{\partial g}{\partial (x_3 x_5 x_6)}(P_0)$ è invertibile vuol dire

$\frac{\partial g}{\partial P}$



$\Leftarrow$ Sia M si esplicitano le $x_3 \ x_5 \ x_6$ in funzione di $x_1 \ x_2 \ x_4$

Nel caso $M = 1$ lo caso si dice in modo più semplice:

Se $g: \Omega \to \mathbb{R}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Se $\exists\, i \in 1 \dots N$

$\frac{\partial g}{\partial x_i}(P_0) \neq 0 \Rightarrow$ esplicito x_i in termini delle altre

$$x_i = x_i(\underbrace{x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_N}_{N-1 \text{ variabili}})$$

Per esempio se $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$, g va da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$; g è C^1

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = 2z$$

$$S = \{g(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

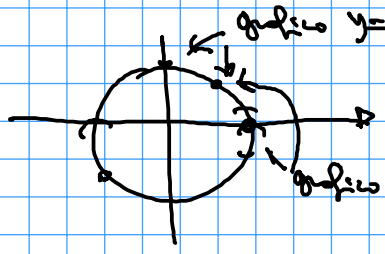
Se prendo un qualunque punto $P_0 \in S$ $P = (x_0, y_0, z_0)$

trovo sicuramente una delle tre coordinate $\neq 0$

$\Rightarrow$ una tra $\frac{\partial g}{\partial x}(P_0)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(P_0)$, $\frac{\partial g}{\partial z}(P_0)$ è $\neq 0$

Trovo in ogni caso che S è un grafico (localmente)

o $x = x(y,z)$ ($x_0 \neq 0$) o $y = y(x,z)$ ($y_0 \neq 0$) o $z = z(x,y)$ ($z_0 \neq 0$)



(in due variabili)

IN DEFINITIVA Se $\nabla g(P_0) \neq 0 \Rightarrow$ vicino a P_0 M è un grafico (rispetto a qualche decomposizione)

ANALOGAMENTE (nel caso generale)

Se $\operatorname{rango}\left(\frac{\partial g}{\partial p}(P_0)\right) = M \Rightarrow$ vicino a P_0 M è un grafico (rispetto a una opportuna decomposizione)

Ω aperto di $\mathbb{R}^N$

Definizione Dato V in Ω ($M \leq N$) dico che V è un VINCOLO (BILATERO) REGOLARE DI CODIMENSIONE M in Ω se

esiste una $g: \Omega \to \mathbb{R}^M$, di classe C^1, tale che

$$V = \{ x \in \Omega : g(x) = 0 \} \quad \text{e} \quad \operatorname{rango}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x)\right) = M \quad \forall x \in V$$

Se ciò è vero dico che V ha dimensione $N - M$

NOTA Se $M = N$ V è fatto di punti isolati (per il teorema di inversione locale) DUNQUE IL CASO INTERESSANTE È $M < N$

Nel caso $M = 1$ si dice anche che V è una ipersuperficie in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. L'ipotesi in questo caso diventa:

$\exists\, g: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $V = \{ x : g(x) = 0 \}$ e $\nabla g(x) \neq 0 \ \forall x \in V$.

($S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è una ipersuperficie regolare in $\mathbb{R}^3$ - ha dimensione 2)

Ricordiamo che abbiamo definito le "tangenti" a un insieme generico dicendo che,

Se $A \subset \mathbb{R}^N$ $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ $x_0 \in A$

$\vec{v}$ si dice tangente ad A in x_0 se $\exists\, \varepsilon > 0$ e $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\to A$ di classe C^1 tale che $\gamma(0) = x_0$ $\gamma'(0) = \vec{v}$

CONFRONTIAMO QUESTA NOZIONE DI TANGENZA CON I VINCOLI REGOLARI ORA INTRODOTTI.

TEOREMA Supponiamo V regolare di codimensione $M \to$

$\exists\, g: \Omega \to \mathbb{R}^M$ tale che $V = \{ x : g(x) = 0 \}$ e $\operatorname{rango}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \neq 0$ in ogni punto di V. Sia $x_0 \in V$. Allora

(★) $\vec{v}$ è tangente a V in $x_0 \iff \frac{\partial g}{\partial x}(x_0)\, \vec{v} = 0$

(dunque le direzioni tangenti formano uno spazio lineare) $= \ker \frac{\partial g}{\partial x}(x_0)$

DIM.

$\Rightarrow$ (facile) Se $\vec{v}$ è tangente a V in x_0 $\exists\, \gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\to V$

con $\gamma(0) = x_0$ $\gamma'(0) = \vec{v}$. Questo mi dice che $g(\gamma(t)) = 0$

$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0_M \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(x_0)\vec{v} = 0$ ($\Leftarrow$)

($\forall i = 1..M$ $g_i(\gamma(t)) = 0 \Rightarrow \nabla g_i(\gamma(t))\,\gamma'(t) = 0$; x lo metto in colonna

$\Leftarrow$ (devo usare il teorema delle funzioni implicite!

Supponga per comodità $X = (x', x'')$ con $x' \in \mathbb{R}^{N-M}$ $x'' \in \mathbb{R}^M$

e che $\frac{\partial g}{\partial x''}(x_0)$ invertibile (a posteriori riordinando le variabili!

DUNQUE $\frac{\partial g}{\partial x}(x) = \left(\underset{M\times(N-M)}{\frac{\partial g}{\partial x'}(x)}, \underset{M\times M}{\frac{\partial g}{\partial x''}(x)} \right) \begin{pmatrix} v' \\ v'' \end{pmatrix}$ ← INVERTIBILE

So che $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0)\vec{v} = 0_M$. So $\vec{v} = (\underset{\mathbb{R}^{N-M}}{\vec{v}'}, \underset{\mathbb{R}^M}{\vec{v}''})$ $\Rightarrow$

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x_0)\vec{v}' + \frac{\partial g}{\partial x''}(x_0)\vec{v}'' = 0 \quad , \text{ MOLTIPLICO PER } \left(\frac{\partial g}{\partial x''}(x_0)\right)^{-1}$$

$$\vec{v}'' = -\frac{\partial g}{\partial x''}(x_0)^{-1}\frac{\partial g}{\partial x'}(x_0)\vec{v}'$$

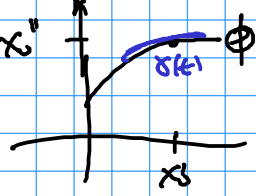
Per il teorema delle funzioni implicite Trovo $\rho > 0$ $\rho_1 > 0$

$\phi : B(x_0', \rho) \to B(x_0'', \rho_1)$ tale che

$$V \cap \left(B(x', \rho) \times B(x_0'', \rho_1) \right) = \{ (x', x'') : x' \in B(x_0', \rho),\ x'' = \phi(x') \}$$

INTRODUCO LA CURVA $\gamma(t) = \left(x_0' + t\vec{v}', \phi(x_0' + t\vec{v}') \right)$

$|t| < \varepsilon$, ε piccolo . E' chiaro che $\gamma(0) = (x_0', \phi(x_0')) = (x_0', x_0'') = x_0$



e $\gamma(t) \in V$ $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

Calcoliamo $\gamma'(t) = \left(\vec{v}', \frac{\partial \phi}{\partial x'}(x_0' + t\vec{v}')\cdot\vec{v}' \right)$

$\gamma'(0) = \left(\vec{v}', \frac{\partial \phi}{\partial x'}(x_0')\vec{v}' \right)$

Ma (dal teorema) so che $\frac{\partial \phi}{\partial x'}(x_0') = -\left(\frac{\partial g(x_0)}{\partial x''}\right)^{-1}\frac{\partial g(x_0)}{\partial x'}$

se applico a $\vec{v}^1$ trovo $\frac{\partial \phi(x_0)}{\partial x}\vec{v}^1 = -\left(\frac{\partial g(x_0)}{\partial x''}\right)^{-1}\frac{\partial g(x_2)}{\partial x'}\vec{v}^1 = \vec{v}^{11}$

$\Rightarrow \quad \gamma'(0) = (\vec{v}^1, \vec{v}^{11}) = \vec{v}$ $\#\#$

(Ho dimostrato che, se $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0)\vec{v} = 0 \Rightarrow \exists\, \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V$ con $\gamma(0) = x_0 \quad \gamma'(0) = \vec{v}$)

DUNQUE NEL CASO DEI VINCOLI REGOLARI V POSSO PARLARE DI "SPAZIO TANGENTE" A V in un suo punto X_0.

$= \operatorname{Ker}\frac{\partial g}{\partial x}(x_0)$ ← HA DIMENSIONE N−M per i teoremi di algebra dato che $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0)$ è MxN, di rango M.

Def Indico lo spazio tangente con $T_V(x_0)$

Chiamo spazio normale l'ortogonale $N_V(x_0) = T_V(x_0)^\perp$

$\dim(T_V) = N - M \qquad \dim(N_V) = M$

Teorema Nelle stesse ipotesi del teorema precedente si ha

$N_V(x_0) =$ IMMAGINE DI $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0)^t$ (che è una matrice NxM)

QUESTO È UN TEOREMA DI ALGEBRA LINEARE:

Se A è una matrice MxN

(★★) $(\operatorname{Ker} A)^\perp = R(A^t)$ (R = IMMAGINE)

questo significa

$\vec{w}\cdot\vec{v} = 0 \ \ \forall \vec{v}$ con $A\vec{v} = 0 \iff \exists\, \vec{\lambda} : \vec{w} = A^t\vec{\lambda} \qquad \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^M$

$(A^t : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N)$

Dim. (a) Se $\vec{w} = A^t\vec{\lambda}$ per $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^M$, se $A\vec{v} = 0$

$\Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{v} = A^t\vec{\lambda}\cdot\vec{v} = \vec{\lambda}\cdot A\vec{v} = \vec{\lambda}\cdot\vec{0} = 0$

(b) Prendo $\vec{w}$ ortogonale a $\operatorname{Ker} A$. Considero la funzione

$\varphi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R} \quad \varphi(\vec{\lambda}) = \|A^t\vec{\lambda} - \vec{w}\|^2 = \|A^t\vec{\lambda}\|^2 - 2A^t\vec{\lambda}\cdot\vec{w} + \|w\|^2 =$

$AA^t\vec{\lambda}\cdot\vec{\lambda} - 2\vec{\lambda}A\vec{w} + \|\vec{w}\|^2$. Noto che AA^t è simmetrica e ≥ 0 . Supponiamo $AA^t > 0$

$(\|A^t\vec{\lambda}\|^2 = A^t\vec{\lambda}\cdot A^t\vec{\lambda} = AA^t\vec{\lambda}\cdot\vec{\lambda})$ (questo è vero se $A = \frac{\partial g}{\partial x}$ con l'ipotesi – si potrebbe fare la dim. anche se $A^tA \geq 0$ ma è più lungo)

Se $AA^t > 0$ allora $AA^t\vec{\lambda}\cdot\vec{\lambda} \geq \varepsilon \|\vec{\lambda}\|^2$ per $\varepsilon > 0$ (ε = minimo autovalore di AA^t) da cui
$\varphi(\vec{\lambda}) \geq \varepsilon\|\vec{\lambda}\|^2 - 2\|A\vec{w}\|\|\vec{\lambda}\| + \|\vec{w}\|^2 \to +\infty$. Ne segue che φ ha minimo su $\mathbb{R}^n$.
$\Rightarrow \exists\, \hat{\lambda} : \nabla\varphi(\hat{\lambda}) = 0_M$ ($\hat{\lambda}$ = punto di minimo). Dato che $\nabla\varphi(\vec{\lambda}) = 2AA^t\vec{\lambda} - 2A\vec{w}$
(applicando il calcolo differenziale) $\Rightarrow$ $2AA^t\hat{\lambda} - 2A\vec{w} = 0 \Leftrightarrow A(A^t\hat{\lambda} - \vec{w}) = 0$

cioè $\boxed{A^t\hat{\lambda} - \vec{w} \in \ker A}$.

Allora $\varphi(\hat{\lambda}) = \|A^t\hat{\lambda} - \vec{w}\|^2 = (A^t\hat{\lambda} - \vec{w})(A^t\hat{\lambda} - \vec{w}) =$

$(A^t\hat{\lambda} - \vec{w})A^t\hat{\lambda} = [A(A^t\hat{\lambda} - \vec{w})]\cdot\hat{\lambda} = 0$ ($A(A^t\hat{\lambda} - \vec{w}) = 0$)

Dunque $\varphi(\hat{\lambda}) = 0$ cioè $A^t\hat{\lambda} = w$ $(w \in R(A^t))$ $\#$

COSA VUOL DIRE L'ULTIMO ENUNCIATO ?!

Se $\vec{w}$ è normale a V $\exists\, \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^M$ tale che

$$\vec{w} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x_0)^t\vec{\lambda} = (\nabla g_1 \cdots \nabla g_M)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_M\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{M}\lambda_i\nabla g_i(x_0)$$

Cioè $\vec{w}$ è nello spazio generato da $\nabla g_1(x_0) \cdots \nabla g_M(x_0)$

$$\boxed{\vec{w} \in N_V(x_0) \Leftrightarrow \exists\, \lambda_1 \dots \lambda_M : \vec{w} = \sum_{i=1}^{M}\lambda_i\nabla g_i(x_0)}$$