Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 25 21/11/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

$g(x,y,w,z) := \begin{pmatrix} 2xy + 3zw \\ 3xz + 2yw \end{pmatrix}$ $\quad P_0 = (2,3,2,-2)$

$P = (x,y,z,w) = (X,Y)$

$\mathcal{M} = \{(x,y,w,z) : g(x,y,w,z) = (0,0)\} \quad \left((S) \begin{cases} 2xy + 3zw = 0 \\ 3xz + 2yw = 0 \end{cases} \right)$

Voglio applicare il teorema delle funzioni implicite. $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$X = (x,y) \quad Y = (w,z)$ (con le notazioni del teorema)

Calcolo la Jacobiana di $g \to$ $J_g(P) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 3z & 3w \\ 3z & 2w & 2y & 3x \end{pmatrix}$

NOTA $P_0 \in \mathcal{M}$: $2 \cdot 2 \cdot 3 + 3(-2)2 = 12 - 12 = 0$

$3 \cdot 2(-2) + 2\,3\,2 = -12 + 12 = 0$

TORNA

$J_g(P_0) = \begin{pmatrix} \underbrace{6 & 4}_{\frac{\partial g}{\partial X}(P_0)} & \underbrace{-6 & 6}_{\frac{\partial g}{\partial Y}(P_0)} \\ -6 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

$X_0 = (2,3)$

$Y_0 = (2,-2)$

$\det\left(\frac{\partial g}{\partial Y}(P_0)\right) = -6 \cdot 6 - 6 \cdot 6 = -72 \neq 0$ POSSO APPLICARE IL TEOREMA

$\exists\, \rho > 0 \ \rho_1 > 0$ ed esiste $g : B(X_0, \rho) \to B(Y_0, \rho_1)$ tale che

$B(X_0,\rho) \subset \mathbb{R}^2 \qquad B(Y_0,\rho_1) \subset \mathbb{R}^2$

$\{ (X,Y) \in \mathcal{M} \text{ con } \|X-X_0\| < \rho, \|Y-Y_0\| < \rho_1 \} =$

$\{ (X,Y) : \|X-X_0\| < \rho_1 \quad Y = f(X) \}$. INOLTRE

f è C^1 e $\dfrac{\partial f}{\partial X}(x) = -\left(\dfrac{\partial g}{\partial Y}(P)\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}(P)\right)$ $\quad P = (X, f(X))$

se $\|X-X_0\| < \rho \quad \|Y-Y_0\| < \rho_1$

IN Particolare

$$\frac{\partial f}{\partial X}(2,3) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y}(2,3,2,-2)\right)^{-1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X}(2,3,2,-2)\right) =$$

$$-\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{-72}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix}$$

cioè, se scrivo $f(x,y) = \begin{pmatrix} w(x,y) \\ z(x,y) \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(2,3) = 1 \qquad \frac{\partial w}{\partial y}(2,3) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,3) = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(2,3) = -2/3$$

Potrei anche considerare x, y generici, vicini a $(2,3)$. Dato che

$$J_g(P) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 3z & 3w \\ 3z & 2w & 2y & 3x \end{pmatrix}$$

$$J_f(x,y) = -\begin{pmatrix} 3z & 3w \\ 2y & 3x \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 3z & 2w \end{pmatrix}\Bigg|_{(z,w)=f(x,y)} = \begin{pmatrix} \text{se scrivo} \\ f(x,y) = \begin{pmatrix} w(x,y) \\ z(x,y) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 3z(x,y) & 3w(x,y) \\ 2y & 3x \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 3z(x,y) & 2w(x,y) \end{pmatrix} = (*)$$

(se (x,y) vicino a $(2,3)$, di modo che la prima matrice esiste!)

Se metto $f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{2}{3}y \end{pmatrix}$

$$-\frac{1}{9zx - 6wy}\begin{pmatrix} 3x & -3w \\ -2y & 3z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 3z & 2w \end{pmatrix} = \frac{1}{6wy - 9xz}\begin{pmatrix} 6xy - 9wz & , & 6x^2 - 6w^2 \\ -4y^2 + 9z^2 & , & -4xy + 6zw \end{pmatrix}$$

← Devo $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(con $w = w(x,y)$, $z = z(x,y)$)

IN REALTÀ, IN QUESTO ESEMPIO, NON È DIFFICILE TROVARE ESPLICITAMENTE LA $f(x,y) = \begin{pmatrix} w(x,y) \\ z(x,y) \end{pmatrix}$. Devo risolvere il sistema non lineare

$$\begin{cases} 2xy + 3wz = 0 \\ 3xz + 2yw = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2xy = -3wz \\ 3xz + 2yw = 0 \end{cases} \leftrightarrow z = -\frac{2}{3}\frac{xy}{w} \quad (\text{se } w \neq 0)$$

Noto che, se $w = 0$ trovo $\begin{cases} xy = 0 \\ xz = 0 \end{cases} \iff$ $w = 0$, $x = 0$, oppure $w = 0$, $y = 0$, $z = 0$

DUNQUE IN $\mathcal{M}$ trovo $\{w = x = 0\} \cup \{w = y = z\} = 0$; se $w \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} z = -\frac{2}{3}\frac{xy}{w} \\ 3x\left(-\frac{2}{3}\frac{xy}{w}\right) + 2yw = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -\frac{2}{3}\frac{xy}{w} \\ yx^2 = yw^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 = z \\ \text{oppure} \\ z = -\frac{2}{3}\frac{xy}{w} \\ x^2 = w^2 \end{cases}$$

L'ULTIMO SISTEMA MI DÀ $\begin{cases} z = -\frac{2}{3}(\pm y) \\ x = \pm w \end{cases}$ cioè $\begin{cases} z = \mp\frac{2}{3}y \\ x = \pm w \end{cases}$

IN DEFINITIVA

$$\mathcal{M} = \{w = x = 0\} \cup \{w = y = z = 0\} \cup \{y = z = 0\} \cup \{w = x,\ z = -\tfrac{2}{3}y\} \cup \{w = -x,\ z = \tfrac{2}{3}y\} =$$

$$\{w = x = 0\} \cup \{z = y = 0\} \cup \{w = x,\ z = -\tfrac{2}{3}y\} \cup \{w = -x,\ z = \tfrac{2}{3}y\}$$

$\mathcal{M}_1$ $\mathcal{M}_2$ $\mathcal{M}_3$ $\mathcal{M}_4$

$P_0 = (2, 3, 2, -2) \in \mathcal{M}_3$ (e non in $\mathcal{M}_3$)

$\mathcal{M}_3$ è il grafico di $f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{2}{3}y \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{3}$

è chiaro anche che $M = M_3$ = grafico di f VICINO A P_0

NOTIAMO CHE VICINO A P_0 NON POSSO scrivere M (cioè M_3) come grafico di una $\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}(y,z)$ perché $(x, 3, x, -2) \in M_3 \cap M$

e allora per lo stesso $(y,z) = (3,-2)$ ci sono tante $(x,w) = (x,x)$

IN EFFETTI NON POSSO APPLICARE IL TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE CON LA DECOMPOSIZIONE

$X = (y, z)$ $\quad Y = (x, w)$ data da

$$\det\left(\frac{\partial g}{\partial Y}(P_0)\right) = 0$$

$$\det\left(\frac{\partial g}{\partial (x,w)}\right) = \det\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$J_g(P_0) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -6 & 6 \\ -6 & 4 & 6 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x & y & w & z \end{pmatrix}$$