Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 24 20/11/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Differenziabilità di f^{-1} + condizioni di invertibilità

Teorema $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, aperto. $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$. $x_0 \in \Omega$

f di classe C^1 in Ω,

Se $df(x_0)$ è invertibile - detto altrimenti se lo Jacobiano $Jf(x_0)$ ha determinante $\neq 0$ - allora $\exists\, \rho > 0$ tale che

(a) f è iniettiva in $B = B(x_0, \rho) = \{\|x - x_0\| < \rho\}$

(b) l'insieme $B_1 := f(B(x_0, \rho))$ è un aperto (che contiene $y_0 = f(x_0)$)

(c) La funzione $f^{-1} : B_1 \to B$ è differenziabile in y_0 e vale

$$Jf^{-1}(y_0) = Jf(x_0)^{-1} \quad \leftarrow$$

(TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE) ~ se $df(x_0)$ è invertibile $\Rightarrow$ f è invertibile "in un intorno di x_0", e f^{-1} è differenziabile (NON LO DIMOSTRIAMO)

OSS. Se so che f^{-1} ed f sono differenziabili $\Rightarrow$

$$d(f^{-1}\circ f)(x_0) = dI(x_0) = id \quad \left(I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_{id} \right)$$

$$\overset{\shortparallel}{df^{-1}(y_0)} \cdot \circ \; df(x_0) \qquad \text{DA CUI}$$

$$df^{-1}(y_0) = df(x_0)^{-1} \quad \left(\text{cioè la formula scritta sopra} \right)$$

<u>OSS.</u> Se $N > 1$ <u>NON È VERO CHE</u>

$\det J_f(x) \neq 0 \quad \forall x \in A \implies f$ invertibile in Ω

Per esempio posso prendere $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$

Calcoliamo le derivate parziali:

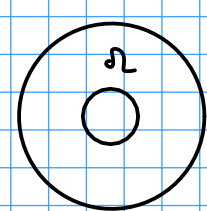
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2y \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2x \qquad \implies J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $4(x^2+y^2) \neq 0$ se $(x,y) \neq (0,0)$

Se mi metto in $\Omega = \{ 1 < x^2+y^2 < 4 \}$ trovo

che $df(x,y)$ è invertibile $\forall (x,y) \in \Omega$



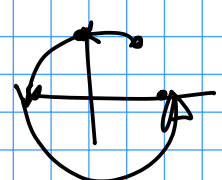
PERÒ VEDO che $f(-x,-y) = f(x,y)$

$\implies$ $\boxed{f \text{ NON È INIETTIVA}}$

Se passo in coordinate polari vedo che il punto

$(\underbrace{\rho\cos\theta}_{x}, \underbrace{\rho\sin\theta}_{y})$ ha come immagine $\begin{pmatrix} \rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2 \\ 2\rho^2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}$

$$= \rho^2 \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta \end{pmatrix}$$



<u>NOTA</u> IN $N=1$ $(f'(x_0) \neq 0)$ avevo $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

<u>ESEMPIO</u> $f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy} + 3x \\ e^{xy} - y \end{pmatrix}$ e prendo

$P_0 = (0,0) \Rightarrow f(P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Inoltre

$$J_f(P) = \begin{pmatrix} y e^{xy} + 3 & x e^{xy} \\ y e^{xy} & x e^{xy} - 1 \end{pmatrix}, \quad J_f(P_0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$J_f(P_0)$ è invertibile ($\det = -3 \neq 0$) $\Rightarrow$ VICINO A $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ f è invertibile e f^{-1} differenziabile. In part.

$$J_{f^{-1}}(1,1) = J_f(0,0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

NON È POSSIBILE TROVARE f^{-1} : dovrei risolvere

$$\begin{cases} e^{xy} + 3x = t \\ e^{xy} - y = w \end{cases}$$

NON SI FA

TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE

OSSERVAZIONE Supponiamo che A sia una matrice $M \times N$ con $N > M$. A individua un'applicazione lineare $X \mapsto AX$ da $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$. Se pongo $\mathcal{M} = \{X \in \mathbb{R}^N : AX = 0\}$ è un sottospazio lineare di $\mathbb{R}^N$. Che dimensione ha $\mathcal{M}$?! Se $\operatorname{rango} A = M$ (il massimo possibile) $\Rightarrow$ $\dim \mathcal{M} = N - M$

Per esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ $M = 2$ $N = 3$

$$\mathcal{M} = \left\{ (x,y,z) : \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + 6y + 3z = 0 \end{cases} \right.$$

Noto che la sottomatrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ è invertibile $\Rightarrow$

posso risolvere $\begin{cases} 3y - z = -x \\ 6y + 3z = -2x \end{cases}$ $y(x), z(x)$ da cui per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\exists!$ (y,z) tale che (x,y,z) risolve il sistema $\Rightarrow$ $\dim(\mathcal{M}) = 1$ $(3-2)$

VEDO DA QUANTO FATTO SOPRA che: punti (x,y,z) di M sono **grafico** di una funzione $x \mapsto (y,z)$ (ricordo che y,z corrispondono alle sottomatrici invertibili)

VOGLIO UNA VERSIONE NONLINEARE

TEOREMA (DELLE FUNZIONI IMPLICITE)

Sono dati Ω aperto in $\mathbb{R}^{N+M}$ ($N+M$ è N dell'esempio)

I PUNTI DI $\mathbb{R}^{N+M}$ li scrivo (x,y) con $x \in \mathbb{R}^N$ e $y \in \mathbb{R}^M$. È data una funzione $g: \Omega \to \mathbb{R}^M$ di classe $C^1(\Omega)$. Pongo

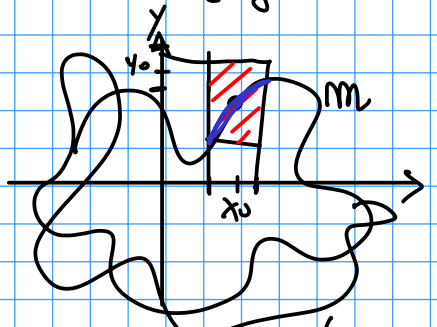
$$M = \{(x,y) : g(x,y) = 0\} \quad \leftarrow \in \mathbb{R}^M$$

(M equazioni in $N+M$ incognite $\begin{cases} g_1(x_1 \dots x_N\, y_1 \dots y_M) = 0 \\ g_M(x_1 \dots x_N\, y_1 \dots y_M) = 0 \end{cases}$)

IPOTESI $\det\left(\underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)}_{M\times M}\right) \neq 0$ (lo jacobiano di g rispetto alle M variabili y)

$$J_g(x_0,y_0) = \left(\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}}_{M\times N} \quad \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}}_{M\times M}\right) \leftarrow M\times(N+M)$$

ALLORA Esistono due numeri $\rho>0$, $\rho_1>0$ ed esiste una funzione $f: B_X(x_0,\rho) \to B_Y(y_0,\rho_1)$ tale che



$$M \cap \underbrace{\left(B(x_0,\rho)\times B(y_0,\rho_1)\right)}_{\text{rettangolo}} = \{(x,y) : x \in B(x_0,\rho),\ y = f(x)\}$$

M è "localmente un grafico $y = f(x)$"

Dim. Introduco una nuova funzione $h: \Omega \to \mathbb{R}^{N+m}$

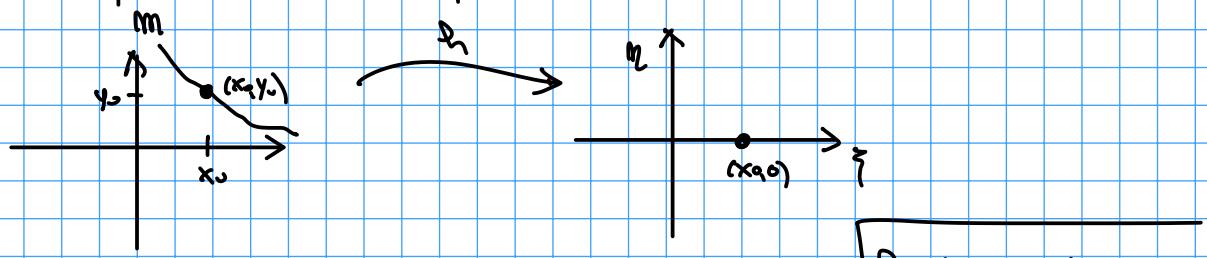
ponendo $h(x,y) = (\underbrace{x}_{\mathbb{R}^N}, \underbrace{g(x,y)}_{\mathbb{R}^m})$ (stessa dimensione in partenza e in arrivo)

Vediamo qual è lo Jacobiano di h:

$$J_h(x,y) = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ \hline \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_h(x,y) = \det \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \neq 0$$

DUNQUE $\exists\, r>0$ tale che $h : B((x_0,y_0), r)$ è invertibile

cioè esiste h^{-1} definita in un intorno di $h(x_0,y_0) = (x_0, g(x_0,y_0)) = (x_0, 0)$.



$h = (x, g(x,y))$

Scrivo $h^{-1} = (h^{-1}_1, h^{-1}_2)$

DUNQUE $h(h^{-1}(\xi,\eta)) = (\xi,\eta)$

$(h^{-1}_1, g(h^{-1}_1, h^{-1}_2)) \iff$

$h^{-1}_1(\xi,\eta) = \xi \qquad g(\xi, h^{-1}_2(\xi,\eta)) = \eta$

PONGO $f(x) := h^{-1}_2(x,0) \Rightarrow$

$$g(x, f(x)) = g(x, h^{-1}_2(x,0)) = 0$$

(e con un po' di attenzione si vede anche che se $g(x,y)=0 \Rightarrow y = f(x)$, vicino a x_0, y_0)

QUINDI HO TROVATO f : definita vicino a x_0 tale che $M = \{(x, f(x)) \mid$ (vicino a (x_0,y_0)). #

INOLTRE VALE ANCHE CHE f è differenziabile

e $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)^{-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)$ ★

LA DIFFERENZIABILITÀ SI DEDUCE DALLA DEF. DI f DOVE SOPRA.

Per quanto riguarda la formula ★ basta usare il fatto che:

$$g(x, f(x)) = 0 \qquad \text{(usando la derivata della composizione)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)) \frac{\partial f}{\partial x}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x))}_{\text{INVERTIBILE}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x))$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x) = -\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x))^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x))}$$

ESEMPIO Prendo $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$g(x,y,w,z) := \begin{pmatrix} 2xy + 3wz \\ 3xz + 2yw \end{pmatrix}$$

e considero $P_0 = (2,3,2,-2) \Rightarrow g(P_0) = 0$

$(2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2(-2) = 0 \quad , \quad 3 \cdot 2(-2) + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 0)$

VOGLIO APPLICARE IL TEOREMA PER CARATTERIZZARE

$$M = \left\{ \begin{cases} 2xy + 3wz = 0 \\ 3xz + 2yw = 0 \end{cases} \right\}$$

Devo calcolare lo Jacobiano di g (in P_0)

$$J_g(x,y,w,z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 3z & 3w \\ 3z & 2w & 2y & 3x \end{pmatrix}$$

$$J_g(P_0) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -6 & 6 \\ -6 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial}{\partial(x,y)}$ $\qquad$ $\det = -72 \neq 0$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial(z,w)}$

Per il teorema della funzione implicita posso ricavare (w, z) in termini di (x, y) (vicino a P_0), cioè esiste $g = g(x, y)$ da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ per cui

$$\Phi = \left((x, y, g_1(x, y), g_2(x, y)) \right) \quad \left(\text{per } (x, y) \sim (2, 3) \right)$$

$$= \left((x, y, w(x, y), z(x, y)) \right)$$

INDICANDO $g(x, y) = \begin{pmatrix} w(x, y) \\ z(x, y) \end{pmatrix}$

POSSO ANCHE CALCOLARE $\begin{matrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{matrix}$

nel punto $x = 2, y = 3$

Implicita: $\frac{\partial (w, z)}{\partial (x, y)}(2, 3) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial (w, z)} \right)^{-1} (2, 3, 2, -2) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial (x, y)}(2, 3, 2, -2)$

$$= -\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{72} \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$