Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 23 15/11/17

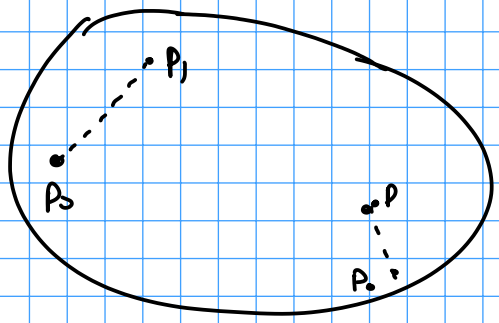
(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Breve cenno alla CONVESSITÀ.

Def. (a) Dato $A \subset \mathbb{R}^N$ si dice che A è convesso quando per ogni coppia di punti $P_0, P_1 \in A$ e per ogni $t \in [0,1]$ si ha:

$$P_t = \underbrace{t P_1 + (1-t) P_0}_{\text{descrive il segmento tra } P_0 \text{ e } P_1} \in A$$

$t=0 \to P_0$, $t=1 \to P_1$



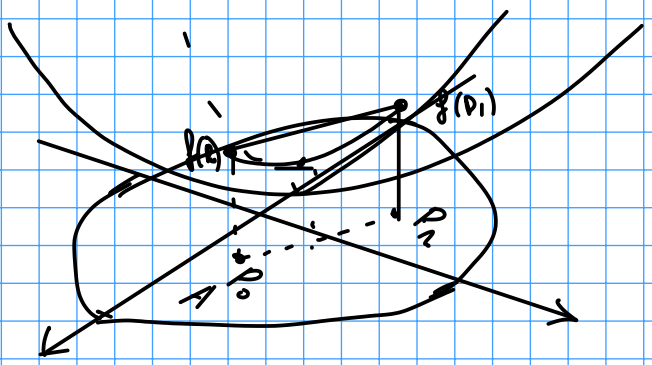
(CONVESSO $\Rightarrow$ CONNESSO)

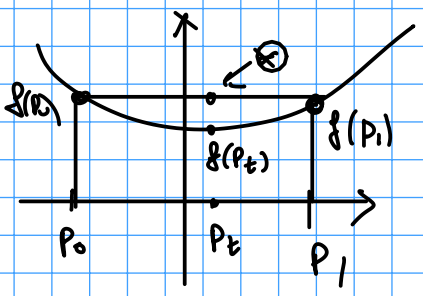
(b) $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}^N$, A convesso. Dico che f è CONVESSA se $\text{epi}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{N+1} : y \le f(x)\}$ è convesso in $\mathbb{R}^{N+1}$

Questo è equivalente a dire che:

$\forall P_0, P_1 \in A$ $\forall t \in [0,1]$, posto $P_t = t P_1 + (1-t) P_0$ $(\in A)$

si ha $f(t P_0 + (1-t) P_1) \left(= f(P_t) \right) \le \underbrace{t f(P_1) + (1-t) f(P_0)}_{\otimes}$





PROPRIETÀ

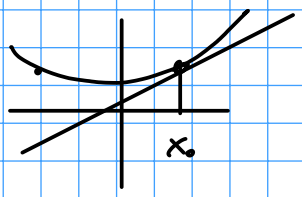
(1) Se f è convessa in A (convesso) $\Rightarrow$ f è continua in $\mathring{A}$

Supponiamo che A sia un aperto convesso

(2) Se f è di classe C^1 su A, allora

f è convessa in A $\iff$ $f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$

$\forall x, x_0 \in A$



NOTA Da (2) si ricava che per le funzioni convesse vale

$\nabla f(x_0) = 0 \iff x_0$ è punto di minimo (assoluto)

(3) Se $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^2 su A, allora

f convessa $\iff$ $Hf(x) \geq 0 \quad \forall x \in A$

(semi definita positiva)

DIMOSTRO (3) NOTO CHE IN GENERALE

f CONVESSA IN A $\iff$ $\begin{cases} \forall P_0 P_1 \in A \text{ la funzione } \varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \\ \varphi(t) = f(tP_0 + (1-t)P_1) \text{ è convessa su } [0,1] \end{cases}$

(si vede facilmente dalla definizione)

Quindi mi riconduco alla proprietà di questa φ

DIMOSTRO CHE f convessa $\Rightarrow Hf(x) \geq 0 \ \forall x$. Siano $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$, $x \in A$

Considero $\varphi(t) = f(x + t\vec{v})$, so che φ è convesso

$\Rightarrow$ (1 variabile) $\varphi''(t) \geq 0$ Ma so anche che

$$\varphi''(t) = Hf(x + t\vec{v})(\vec{v}^2)$$

IN PARTICOLARE $0 \leq \varphi''(0) = Hf(x)(\vec{v}^2)$

Dato che $\vec{v}$ è qualunque ho dimostrato $Hf(x) \geq 0$

DIMOSTRO CHE $Hf(x) \geq 0 \Rightarrow f$ convessa.

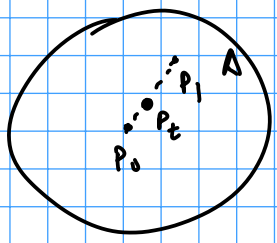
Fisso P_0 e P_1 e prendo $t \in [0,1]$. Pongo

$\varphi(t) = f(P_0 + t(P_1 - P_0))$; so che

$\varphi''(t) = Hf(P_0 + t(P_1 - P_0))(P_1 - P_0)^2 \geq 0$ per ipotesi

$\Rightarrow \varphi$ è convesso su $[0,1] \Rightarrow f$ è convesso

dato che P_0 e P_1 sono arbitrari.



ALTRI ESERCIZI IN VISTA DEL COMPITINO

Taylor Considero $f(x,y,z) = (xy+z)e^{(x-y-2z)}$ $P_0 = (1,-1,1)$

Voglio $P_{3,P_0}(x,y,z)$ (nelle variabili $(x-1)$, $(y+1)$, $(z-1)$)

(VOGLIO EVITARE DI CALCOLARE LE DERIVATE, E INVECE VOGLIO USARE GLI SVILUPPI NOTI IN UNA VARIABILE)

CONVIENE SCRIVERE $x = 1+\alpha$ $y = -1+\beta$ $z = 1+\gamma$ $\Rightarrow$

$$g(\alpha,\beta,\gamma) = f(1+\alpha, -1+\beta, 1+\gamma) =$$

$$\left[(1+\alpha)(-1+\beta) + (1+\gamma)\right] e^{1+\alpha+1-\beta-2-2\gamma} = \underbrace{(-\alpha+\beta+\alpha\beta+\gamma)}_{\text{I° ORDINE}} e^{\alpha-\beta-2\gamma} =$$

$$(-\alpha+\beta+\alpha\beta+\gamma)\left(1+\alpha-\beta-2\gamma+\frac{1}{2}(\alpha-\beta-2\gamma)^2+o(\|P\|^2)\right) =$$

$(P = (\alpha,\beta,\gamma))$
$(\alpha = O(\|P\|)$
$\beta, \gamma \ldots)$

$$-\alpha+\beta+\alpha\beta+\gamma-\alpha^2+\alpha\beta+\alpha^2\beta+\alpha\gamma$$
$$+\alpha\beta-\beta^2-\alpha\beta^2-\beta\gamma+2\alpha\gamma-2\beta\gamma-2\alpha\beta\gamma-2\gamma^2$$
$$+\frac{1}{2}\underbrace{(\alpha-\beta-2\gamma)^2}_{\otimes}(-\alpha+\beta+\gamma) + o(\|P\|^3) =$$

$$-\alpha+\beta-\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2+3\alpha\gamma-3\beta\gamma+2\gamma^2+$$

$$\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-2\alpha\beta\gamma+ \quad \text{ALTRI 18 TERMINI CHE ESCONO DA } \otimes \ldots$$

MODIFICO L'ESERCIZIO

$f=(xy+1)^2 e^{x-y-2z}$. COME PRIMA TROVO

$$\left((1+\alpha)(-1+\beta)+1\right)^2 e^{1+\alpha+1-\beta-2-2\gamma} =$$

$$(-\alpha+\beta+\alpha\beta)^2 e^{\alpha-\beta-2\gamma} = \qquad D=(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta-2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\underbrace{\alpha^2\beta^2}_{=o(\|D\|^3)})\left(1+(\alpha-\beta-2\gamma)+o(\|D\|)\right) =$$

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta-2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+$$
$$\alpha^3+\alpha\beta^2-2\alpha^2\beta \quad +$$
$$-\alpha^2\beta-\beta^3+2\alpha\beta^2 \quad +$$
$$-2\alpha^2\gamma-2\beta^2\gamma+4\alpha\beta\gamma =$$

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta-5\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2+\alpha^3-\beta^3-2\alpha^2\gamma-2\beta^2\gamma+4\alpha\beta\gamma$$

$\Downarrow$

$$P_3(x,y,z)=(x-1)^2+(y+1)^2-2(x-1)(y+1)-5(x-1)^2(y+1)+5(x-1)(y+1)^2$$
$$+(x-1)^3-(y+1)^3-2(x-1)^2(z-1)-2(y+1)(z-1)+4(x-1)(y+1)(z-1)$$

SE VOGLIO POSSO RICAVARE

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,-1,1)=-1\cdot 6=-6 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}(1,-1,1)=4\cdot 1=4$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial z}(1,-1,1)=2!\,(-2)=-4$$

ESERCIZIO SULLE CURVE (TRENO #8) Dati $r>0$ $\omega>0$ $k>0$

$\gamma(t)=(r\cos(\omega t), r\sin(\omega t), kt)$ $\quad 0\le t\le \frac{2\pi}{\omega}$ (ELICA)

$P_0=(0,0,\pi)$

$$\gamma'(t) = (-r\omega \sin(\omega t),\ r\omega \cos(\omega t),\ k)$$

$$\|\gamma'\|^2 = r^2\omega^2 \sin^2(\omega t) + r^2\omega^2 \cos^2(\omega t) + k^2 = r^2\omega^2 + k^2 \Rightarrow \|\gamma'\| = \sqrt{r^2\omega^2 + k^2}$$

(costante)

Voglio il "MOMENTO DI INERZIA" DI γ rispetto a P_0

CIOÈ $\int_\gamma g(P)\, ds$ dove $g(P) = \|P - P_0\|^2$

CIOÈ: Se $P = (x, y, z)$ $\quad g(P) = x^2 + y^2 + (z-\pi)^2$

La devo integrare su γ. VIENE:

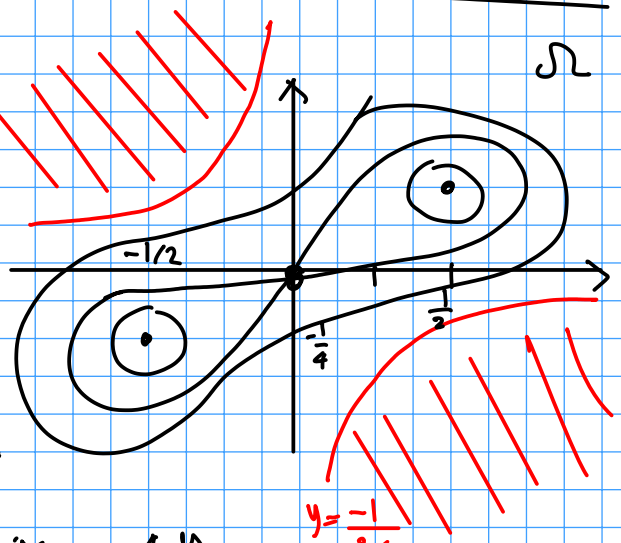
$$\int_0^{2\pi/\omega} g(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_\gamma \left[(r\cos(\omega t))^2 + (r\sin(\omega t))^2 + (kt-\pi)^2\right]\sqrt{r^2\omega^2+k^2}\,dt$$

$$= \sqrt{r^2\omega^2+k^2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left(r^2 + (kt-\pi)^2\right)dt = \sqrt{r^2\omega^2+k^2}\left(\frac{2\pi}{\omega}r^2 + \left[\frac{(kt-\pi)^3}{3k}\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\right) = \sqrt{r^2\omega^2+k^2}\left(\frac{2\pi}{\omega}r^2 + \frac{1}{3k}\left(\frac{2k\pi}{\omega}-\pi\right)^3 - \frac{\pi^3}{3k}\right)\ldots$$

STUDIO DI FUNZIONE

$$f(x,y) = \ln(1+8xy) - x^2 - 4y^2$$

- DOMINIO: $\{1+8xy > 0\} = \Omega$



- Dentro Ω f è C^∞. Calcolo le derivate

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{8y}{1+8xy} - 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{8x}{1+8xy} - 8y$$

PTI STAZ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x = \dfrac{4y}{1+8xy} \\ y = \dfrac{x}{1+8xy} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 4\left(\frac{1}{1+8xy}\right)^2 x \qquad \begin{matrix} \nearrow\ x=0 \\ \searrow\ 4\left(\dfrac{1}{1+8xy}\right)^2 = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{1+8xy}}_{>0} = \pm\frac{1}{2}$$

SOLO IL SEGNO +

$\Updownarrow$

$1+8xy = 2$

$\Updownarrow$

$8xy = 1$

TORNO AL SISTEMA

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8xy = 1 \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = 1 \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = \pm 1/2 \\ y = \pm 1/4 \end{matrix}$$

TRE PUNTI CRITICI $(0,0)$, $\pm(1/2, 1/4)$. CALCOLO L'HESSIANO

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-64y^2}{(1+8xy)^2} - 2 \; ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-64x^2}{(1+8xy)^2} - 8 \; ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{8(1+8xy) - 8y\,8x}{(1+8xy)^2} = \frac{8}{(1+8xy)^2}$$

DUNQUE

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \qquad \det < 0 \rightarrow \text{SELLA}$$

$$Hf\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-64}{16} - 2 & \frac{8}{4} \\ \frac{8}{4} & \frac{-64}{4} - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -12 \end{pmatrix} \qquad \det > 0 \quad \text{Tr} < 0$$

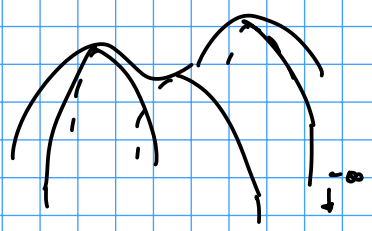
MASSIMO

CONSIDERO $M := \{(x,y) : f(x,y) \le 0\}$

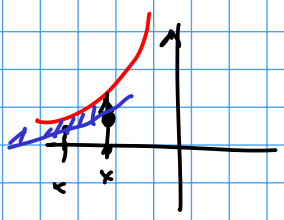
DOMANDA: M è limitato ??

NOTA Se $1 + 8x_0y_0 = 0$ ($(x_0,y_0) \in$ LINEA ROSSA)

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \overset{u}{=} \ln(0^+) - x_0^2 - 4y_0^2 \overset{y}{=} -\infty$$



VEDO ALLORA CHE, se $x < 0$, $\lim_{y \to -\frac{1}{8x}} f(x,y) = -\infty$



$\Rightarrow$ per y VICINO A $-\frac{1}{8x}$ $f(x,y) < 0$

DUNQUE PER OGNI $x < 0$ $\exists\, y_x$ tale che $(x, y_x) \in M$

Dato che $\|(x, y_x)\| \ge |x|$ questi punti hanno norma "grande a piacere"

$\Rightarrow$ M NON È LIMITATO

DOMANDA $\exists$ max di f su $D = \{1 + 8xy \geq 0\}$??

Si vede che $\lim_{\substack{\|(x,y)\| \to \infty \\ (x,y) \in D}} f(x,y) = -\infty$

INFATTI

$$\ln(1 + 8xy) - x^2 - 4y^2 \leq \ln(1 + 8xy) - x^2 - y^2 \leq$$
$$\ln(1 + 4(x^2+y^2)) - x^2 - y^2 = \ln(1 + \|P\|^2) - \|P\|^2$$

$(P = (x,y))$

E' NOTO CHE $\ln(1+t^2) - t^2 \to -\infty$ se $|t| \to \infty$

$\Rightarrow$ IL LIMITE SOPRA È EFFETTIVAMENTE $-\infty$

$\Rightarrow$ $\{f(x,y) \geq 0\}$ sono limitati

$\Rightarrow$ f ha massimo (perché $\sup_{\{f \geq 0\}} f = \sup_D f$ $= \max_{\{f \geq 0\}} f = \max_D f$ (WEIERSTRASS)

QUANTO FA

$$\max_D f = ??$$

Deve essere assunto nei punti $\pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ $\Rightarrow$

$$\max_D f = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \ln\left(1+1\right) - \frac{1}{4} - \frac{4}{16} = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

(deve essere ≥ 0 dato che $f(0,0) = 0$)

$\left(\ln(2) > \frac{1}{2}\ ?!\ \Leftrightarrow\ 2 > e^{1/2} \Leftrightarrow 2 > \sqrt{e} \Leftrightarrow 4 > e\ \underline{\underline{\text{SÌ}}}\right)$

FINE