Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 21 13/11/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

ESERCIZI SU MAX/MIN "LIBERI"

Data la seguente funzione dobbiamo trovare i punti stazionari e classificarli.

① Data $4x^2+y^2-4e^{xy-1}$

- DOMINIO DI f = TUTTO $\mathbb{R}^2$
- Calcolo le derivate parziali di f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x - 4e^{xy-1}(y) = 8x - 4ye^{xy-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 4xe^{xy-1}$$

Faccio già le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 8 - 4y^2 e^{xy-1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4e^{xy-1} - 4xye^{xy-1},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 - 4x^2 e^{xy-1} = -4e^{xy-1}(1+xy)$$

- PUNTI CRITICI DI f:

$$\begin{cases} 2x = ye^{xy-1} \\ y = 2xe^{xy-1} \end{cases} \quad (\nabla)$$

$$\Rightarrow \quad 2x = \underbrace{2x\, e^{xy-1}}_{y}\, e^{xy-1} \iff x = x\left(e^{xy-1}\right)^2$$

$$\iff x=0 \quad \text{oppure} \quad \Big| \quad 1 = \left(e^{xy-1}\right)^2 \leftrightarrow e^{xy-1} = 1$$

$$\leftrightarrow xy - 1 = 0 \leftrightarrow xy = 1$$

Torniamo al sistema (∇):

- Se $x=0$ Trovo $y \neq 0$ $\Rightarrow$ il punto $\boxed{(0,0)}$
- Se $xy = 1$ (∇) diventa

$$\begin{cases} y = 2x \\ xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{x} = 2x \\ y = 1/x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \iff \begin{matrix} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \sqrt{2} \end{matrix}$$

TROVO ALTRI DUE PUNTI $\boxed{\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)}$

Per determinare la natura di questi punti calcoliamo l'Hessiana in ognuno di essi

$$Hg(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & -\frac{4}{e} \\ -\frac{4}{e} & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = 16 - \frac{16}{e^2} > 0 \qquad a_{11} = 8 > 0$$

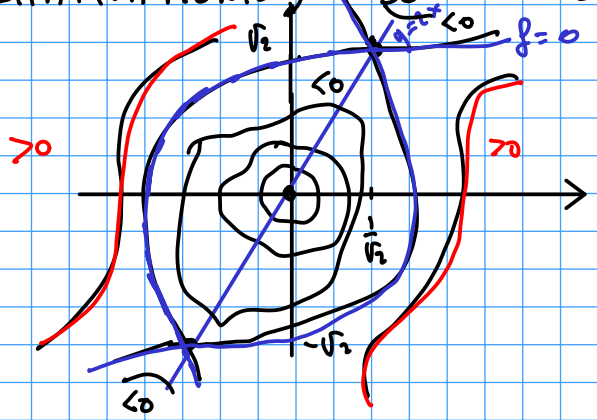
$(0,0)$ è pto di MINIMO

$$Hg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} 8 - 4\cdot 2 \cdot 1 & (-4 - 4\cdot 1)\cdot e^0 \\ (-4-4)e^0 & 2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

Det. $= 0 - 64 < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ è pto di SELLA

Stesso discorso per il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$

QUALITATIVAMENTE LE LINEE DI LIVELLO:



$$f(0,0) = -\frac{4}{e}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = \frac{4}{2} + 2 - 4\cdot 1$$

$$= 2 + 2 - 4 = 0$$

DOMANDA ESISTONO $\min_{\mathbb{R}^2} f$, $\max_{\mathbb{R}^2} f$?!

(1) (abbastanza facile) NON ESISTE IL MAX perché se ci fosse P_0 pto di max avrei:

$$\nabla f(P_0) = 0 \qquad H_f(P_0) \leq 0$$

MA PUNTI DEL GENERE NON CE NE SONO !!.

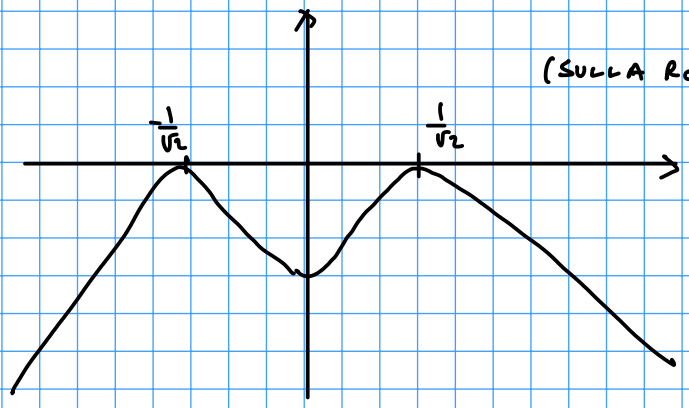
(2) POTREBBE AVERE MINIMO IN $(x,y) = (0,0)$ nel qual caso avrei:

$$\min_{\mathbb{R}^2} f = -\frac{4}{e}$$

Vediamo cosa fa $\varphi(x) = f(x,x) = 5x^2 - 4e^{x^2-1}$

Si vede subito che $\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x,x) = -\infty$

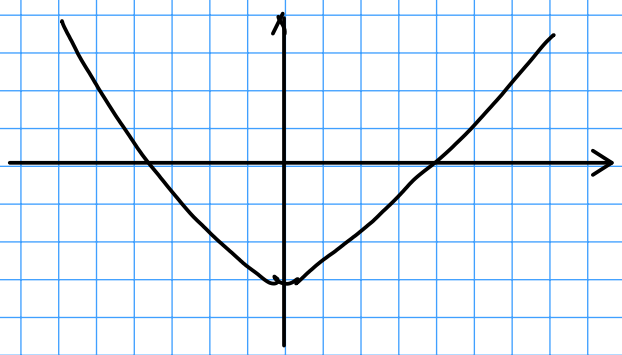
Il grafico di φ è più o meno



DUNQUE $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty \Rightarrow$ non esiste MINIMO

$(0,0)$ È SOLO MINIMO LOCALE

Se invece guardo sulla retta $y = -x$ trovo



$$f(x,-x) = 5x^2 - 4e^{-x^2-1}$$

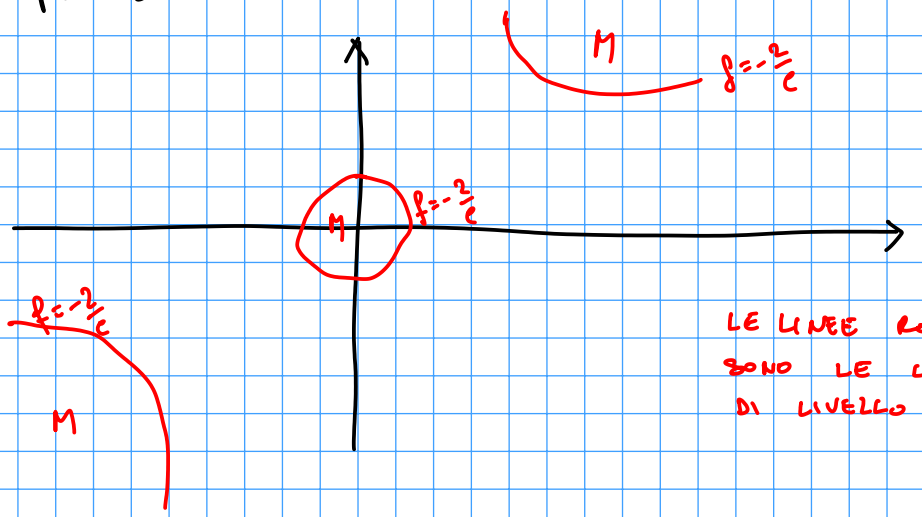
UNA DOMANDA CHE SI POTREBBE INCONTRARE:

- Posto $M = \left\{ (x,y) : f(x,y) \le -\frac{2}{e} \right\}$

DOMANDA: M È LIMITATO ??

RISPOSTA: **NO** Dato che $f(x,x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$ (e $x \to -\infty$) $\Rightarrow$ quando x è grande $f(x,x) < -\frac{2}{e}$. In altri termini $(x,x) \in M$ se $|x|$ è grande.

DUNQUE M contiene punti con norma grande e "giace" $\Rightarrow$ M NON È LIMITATO



LE LINEE ROSSE SONO LE LINEE DI LIVELLO $\frac{2}{e}$

---

2 $f(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x$

- DOMINIO = TUTTO $\mathbb{R}^2$

- DERIVATE PARZIALI:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + 6y^2 - 150 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12xy - 9y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12x - 18y$$

- PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y(4x - 3y) = 0 \end{cases}$$

$y = 0 \quad x^2 = 25 \iff x = \pm 5, \ y = 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3y = 4x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 25 \\ 3y = 4x \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 4 \end{cases}$$

IN TUTTO TROVO QUATTRO PUNTI $\pm(5,0)$, $\pm(3,4)$

($(\pm 3, \pm 4)$ ← quelli punti - sarebbe sbagliato)

- Vediamo gli Hessiani: $Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & 12y \\ 12y & 12x-18y \end{pmatrix}$

$$Hg(5,0) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 60 \end{pmatrix} \leftarrow (5,0) \text{ PTO DI MINIMO}$$

$$Hg(-5,0) = \begin{pmatrix} -60 & 0 \\ 0 & -60 \end{pmatrix} \leftarrow (-5,0) \text{ PTO DI MASSIMO}$$

$(\det > 0,\ a_{11} < 0)$

$$Hg(3,4) = \begin{pmatrix} 36 & 48 \\ 48 & 36-72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 48 \\ 48 & -36 \end{pmatrix} \qquad \det = -36^2 - 48^2 < 0$$

PTO DI SELLA

$$Hg(-3,-4) = \begin{pmatrix} -36 & -48 \\ -48 & 36 \end{pmatrix} \qquad \det < 0 \qquad \text{PTO DI SELLA}$$

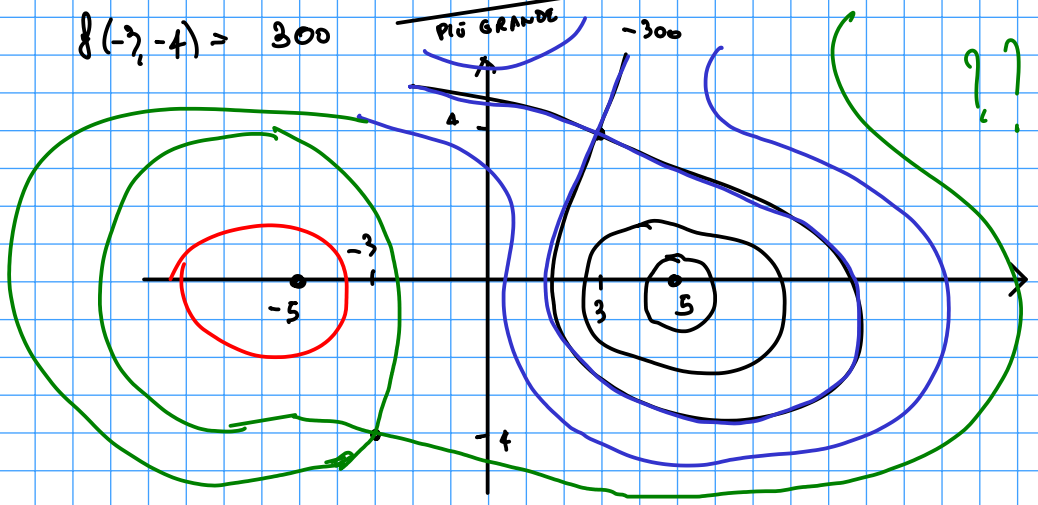
- TENTATIVO DI DISEGNARE LE CURVE DI LIVELLO ...

$f(5,0) = 2\cdot 5^3 - 150\cdot 5 = 5^2(10-30) = -20\cdot 25 = -500$

$f(-5,0) = 500$

$f(3,4) = 2\cdot 3^3 + 6\cdot 3\cdot 16 - 3\cdot 4^3 - 150 = -300$

$f(-3,-4) > 300$



NON È CHIARO

(CI SONO TROPPE POSSIBILITÀ)

DOMANDA POSSIBILE Posto $M=\{(x,y): f(x,y)\le 0\}$

M è limitato ?? NO in foto:

se per esempio prendo i punti $(x,0)$

Trovo $f(x,0) = 2x^3 - 150x = x(2x^2-150)$

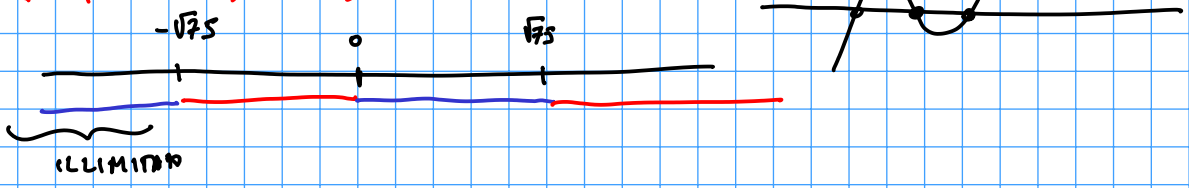
QUESTA ESPRESSIONE è <0 se $x<0,\ 2x^2>150$)

DUNQUE $(x,0)\in M$ se $x<-\sqrt{75}$

QUESTI PUNTI NON SONO LIMITATI

Se voglio studiare $x(2x^2-150)<0$ trovo

$2x(x-\sqrt{75})(x+\sqrt{75})$



ES. SULLA DIFF.

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{4x^2+9y^2} \qquad f(0,0)=0$$

DOMANDA f è CONTINUA / DIFFERENZIABILE IN (0,0) ??

"SCOMMETTO" sul fatto che f è diff. ($\Rightarrow$ è anche cont.)

Provo a dimostrare che è differenziabile. Ho due possibilità

(1) usando la def.

(2) usando il t. del diff. totale.

IN ENTRAMBI I CASI MI SERVONO $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

VEDO SUBITO CHE FANNO ZERO ($f(x,0)=f(0,x)=0$)

(1) Uso la def.: devo far vedere che

$$f(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{=0}(x-0) - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{=0}(y-0) = o(\|x,y\|)$$

CIOÈ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$ CIOÈ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2 y^2}{(4x^2+9y^2)\sqrt{x^2+y^2}}}_{\textcircled{*}} = 0$$

$$|\textcircled{*}| \le \frac{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{(4x^2+4y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{16}\sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

TORNA

(2) Uso il differenziale totale. Posto $(x,y) \neq (0,0)$ e calcolo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(4x^2+9y^2) - x^2y^2 \cdot 8x}{(4x^2+9y^2)^2} = \frac{2xy^2}{(4x^2+9y^2)^2}\left(-4x^2+9y^2\right)$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \le \frac{2|x|\,y^2(4x^2+9y^2)}{(4x^2+9y^2)^2} = \frac{2|x|y^2}{4x^2+9y^2} \le$$

$$\frac{(x^2+y^2)|y|}{4x^2+4y^2} = \frac{|y|}{4} \to 0 \quad \text{se } (x,y)\to(0,0)$$

Nello stesso modo verifico che $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \to 0$