Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 20 8/11/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Teorema $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto $f \in C^2(\Omega)$ (cioè f ha derivate seconde continue). $x_0 \in \Omega$ tale che

x_0 è stazionario per f : $\nabla f(x_0) = 0$

SI HA

(1) Se x_0 è punto di max/min rel. $\Rightarrow$ $Hf(x_0)$ è semidef. negativo / semi def. positiva.

(CONDIZIONE NECESSARIA su $Hf(x_0)$ per avere x_0 max/min)

(2) (COND. SUFFICIENTI).

(a) Se $Hf(x)$ semidefinito negativo / positivo per tutte le x in un intorno $B(x_0, \rho)$ di x_0 $\Rightarrow$ x_0 è pto di max/min rel.

(b) Se $Hf(x_0)$ è definito negativo / positivo $\Rightarrow$ x_0 pto di max/min rel.

Dim. In tutte le dimostrazioni uso la formula di Taylor al 2° ordine: (secondo Peano)

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)}_{=0} + \frac{1}{2} Hf(x_0)(x-x_0)^2 + R(x) =$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2} Hf(x_0)(x-x_0)^2 + R(x) \qquad \text{DOVE}$$

$\to \lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{\|x-x_0\|^2} = 0$ oppure

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} Hf(x_0)(x-x_0)^2 + \underbrace{\|x-x_0\|^2 \sigma(x)}_{R(x)}$$ dove

$\lim_{x\to x_0} \sigma(x) = 0$ (basta definire $\sigma(x) = \frac{R(x)}{\|x-x_0\|^2}$)

Vediamo (1) Caso di x_0 pto di max rel. **So che**

$f(x) - f(x_0) \le 0$ per $x \in B(x_0, r)$ $r>0$ opportuno

DUNQUE $Hf(x_0)(x-x_0)^2 \le -2\|x-x_0\|^2 \sigma(x)$ $\forall x \in B(x_0, r)$

Prendo $x = x_0 + t\vec{v}$ con $\vec{v} \neq 0$ ($\vec{v}$ qualunque in $\mathbb{R}^N$) $\Rightarrow$

$$t^2 Hf(x_0)(\vec{v}^2) \le -2t^2 \|\vec{v}\|^2 \sigma(x_0 + t\vec{v})$$ per t piccoli

(in modo che $|t\|v\|| < r$)

Posso semplificare t^2 $\Rightarrow$

$$Hf(x_0)(\vec{v}^2) \le -2\|\vec{v}\|^2 \sigma(x_0 + t\vec{v}) \quad \forall t \neq 0,\ t \text{ piccolo}$$

Se faccio tendere t a zero $\Rightarrow$

$$Hf(x_0)(\vec{v}^2) \le 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$$

cioè $Hf(x)$ è semidefinita negativa.

Vediamo 2b Suppongo $Hf(x_0) < 0$

($\lambda_1 < 0 \dots \lambda_N < 0 \iff$ $Hf(x_0)(\vec{v}^2) \le -\nu\|v\|^2$ $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$ con $\nu > 0$

prendendo $\nu = \text{minimo}(|\lambda_1| \dots |\lambda_N|)$

Scrivo Taylor:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} Hf(x-x_0)^2 + \|x-x_0\|^2 \sigma(x) \le$$

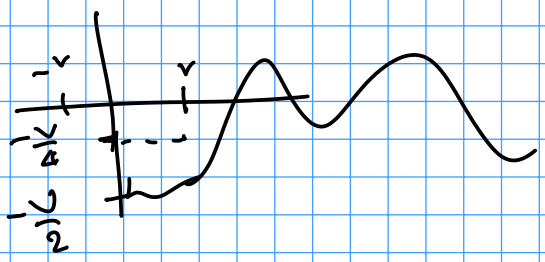
$$-\frac{\nu}{2}\|x-x_0\|^2 + \|x-x_0\|^2 \sigma(x) = \|x-x_0\|^2 \left(-\frac{\nu}{2} + \sigma(x)\right)$$

Dato che $\sigma(x) \to 0$ $\exists r$ tale che $-\frac{\nu}{2} + \sigma(x) \le -\frac{\nu}{4}$ $\forall x \in B(x_0, r)$ (DEF. DI LIMITE $\varepsilon = \frac{\nu}{4}$)

DUNQUE

$$f(x) - f(x_0) \leq -\frac{\nu}{4}\|x - x_0\|^2 \qquad \forall x \in B(x_0, r)$$

$\Rightarrow x_0$ è pto di massimo (è un "massimo isolato")



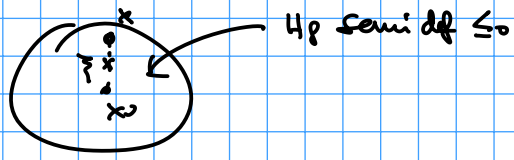
2ª Uso Taylor al I° ordine con resto di Lagrange in un intorno di x_0

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{0}_{\nabla f(x_0)(x - x_0)} + \frac{1}{2} H_f(\xi)(x - x_0)^2$$

dove ξ è segmento da x e x_0

Se prendo $x \in B(x_0, r)$ dove $H_f(x) \leq 0$ in $B(x_0, r)$

$\Rightarrow \xi \in B(x_0, r) \Rightarrow H_f(\xi) \leq 0$



$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0$ DUNQUE x_0 è di max. #

COMMENTO sul numero ν introdotto sopra.

In effetti se A (simmetrica) è definita positiva $\Rightarrow$

$\exists \nu : \quad A v^2 \geq \nu \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^N$

(A def. pos. significa $A\vec{v}^2 > 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N \ \vec{v} \neq 0$)

Per dimostrarlo posso considerare la sfera unitaria $S = \{\|x\| = 1\}$ che è CHIUSO e LIMITATA. Allora la forma quadratica $\varphi(v) = Av^2$ HA MASSIMO E MINIMO SU S

cioè $\exists\ v_1, v_2 \in S$ tali che $Av_1^2 \le Av^2 \le Av_2^2$

Dato che $A>0 \Rightarrow \nu := Av_1^2 > 0 \quad (\mu := Av_2^2)$ DUNQUE

$$(0<)\ \nu \le Av^2 \le \mu \qquad \forall\, v \in S$$

Se $v \in \mathbb{R}^N$, $v \neq 0$ prendo $\hat{v} = \frac{v}{\|v\|} \in S$

$$\Rightarrow \quad 0 < \nu \le A\left(\hat{v}\right)^2 = A\left(\frac{v}{\|v\|}\right)^2 \le \mu$$

$$\Updownarrow$$

$$\nu \|v\|^2 \le Av^2 \le \mu \|v\|^2 \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^N$$

{(!!)

DUNQUE TORNA IL PASSAGGIO DI PRIMA

In effetti si può vedere che ν = minimo autovalore
μ = massimo autovalore

DUNQUE PER DIRE CHE UN PUNTO CRITICO È DI MAX/MIN POSSIAMO CERCARE LA SEGNATURA DI Hf

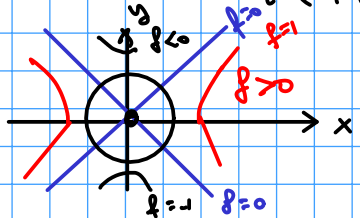
OSS. Se Hf è INDEFINITA, nel senso che $\exists\ \lambda>0$ autovalore e $\mu<0$ autovalore $\Rightarrow$ x_0 NÉ MAX NÉ MIN (dico che x_0 è PUNTO DI SELLA)

ESEMPIO $f(x) = x^2 - y^2$ $\qquad Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$ ←

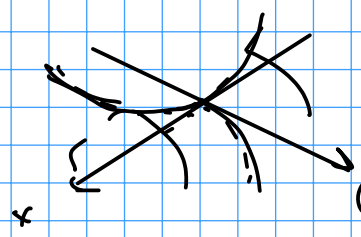
$Df(x,y)=0 \iff (x,y)=(0,0)$ ← PUNTO STAZIONARIO

L'ORIGINE NON È NÉ MAX / NÉ MIN. IN EFFETTI

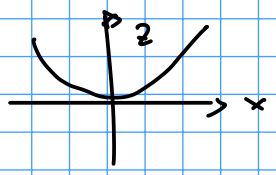
$f(0,0) = 0$ $\qquad \{(x,y) : f(x,y)=0\} = \{x=y\} \cup \{x=-y\}$

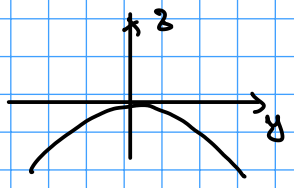


IN OGNI INTORNO $B(x_0, r)$ di $x_0=0$ CI SONO x' t.c. $f(x') > 0$ e x'' $f(x'') < 0$
(x', y') $\qquad (x'', y'')$



$(0,0)$ PUNTO DI SELLA





IN EFFETTI se calcolo l'Hessiana ho

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

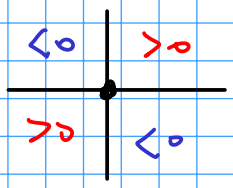
$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ HA DUE AUTOV. $\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2$ DI SEGNO OPPOSTO

STESSO DISCORSO PER LA FUNZIONE $f(x,y) = xy$

Si vede che $\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ $\qquad \nabla f(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ VEDO CHE $\det Hf(0,0) = -1 < 0$

$\Rightarrow$ 2 autovalori discordi $\Rightarrow$ SELLA



$(0,0)$ NÉ MAX NÉ MIN

ESEMPIO $\qquad f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x$

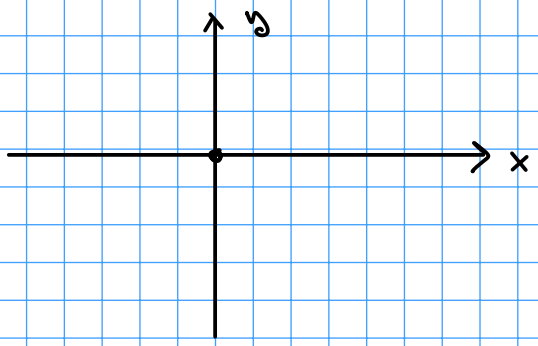
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

PUNTI STAZ ?! $\qquad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ $\qquad \det \neq 0 \Rightarrow$ UNICA SOL È $(0,0)$

L'UNICO PTO CRITICO È $(0,0)$.

Applico Sylvester a $Hf(0,0) \rightarrow \det = 3 > 0 \qquad a_{11} = 2 > 0 \qquad (0,0)$ è di MINIMO



$f(0,0) = 0$

Dato che $Hf > 0 \Rightarrow \exists\, v$:

$Hf(0,0)(v^2) \geq v \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$

Però è chiaro che $(x = (x,y))$

$f(x) = \underset{0}{f(0)} + \underset{0}{\nabla f(0)}\, x + \frac{1}{2} Hf(0) x^2 +$ NIENTE PERCHÉ LE DER III° SONO ZERO

DUNQUE $f(x,y) \geq v\,(x^2+y^2) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

- 0 è MINIMO ASSOLUTO
- $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty$

← SU $\mathbb{R}^2$ (non ho massimo !!)

ESEMPIO $f(x,y) = \ln(1 + 2x^2 + 2y^2) + xy$

- DOMINIO DI f = tutto $\mathbb{R}^2$ dato che $1 + 2x^2 + 2y^2 > 0$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x}{1+2x^2+2y^2} + y$

  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4y}{1+2x^2+2y^2} + x$

(x,y) stazionario $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y = -\frac{4x}{1+2x^2+2y^2} \\ x = -\frac{4y}{1+2x^2+2y^2} \end{cases}$ ← (★)

Ne ricavo $x = \left(-\frac{4}{1+2x^2+2y^2}\right)\left(\frac{4}{1+2x^2+2y^2}\right) x$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$\left(\frac{4}{1+2x^2+2y^2}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow$ $x = 0$ oppure $\frac{4}{1+2x^2+2y^2} = 1$ (denso io quadrato c'è una quantità > 0)

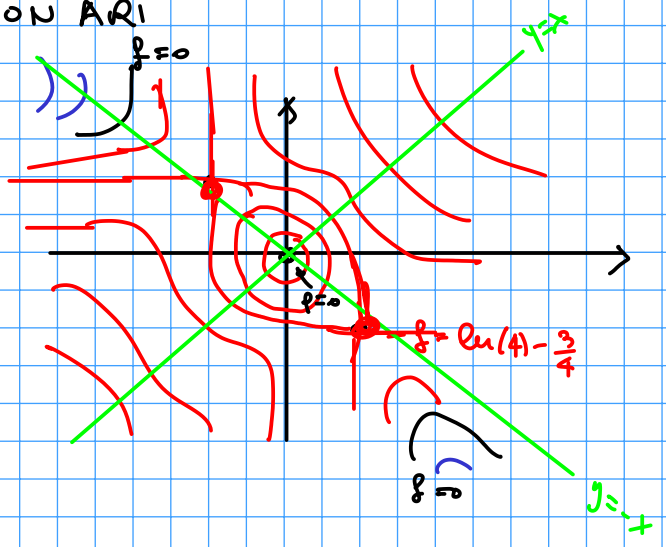
Se $x = 0 \Rightarrow y = 0$

Se no trovo le condizioni (TORNO AL SISTEMA ★)

$\begin{cases} y = -x \\ 2x^2 + 2y^2 + 1 = 4 \\ 2x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 4x^2 = 3 \end{cases}$

ALLA FINE TROVO TRE PUNTI STAZIONARI

$(0,0)$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Vediamo gli Hessiani.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x}{1+2x^2+2y^2} + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4y}{1+2x^2+2y^2} + x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{4(1+2x^2+2y^2) - 4x\,4x}{(1+2x^2+2y^2)^2} = \frac{4}{(1+2x^2+2y^2)} - \left(\frac{4}{(1+2x^2+2y^2)}\right)^2 x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{4}{(1+2x^2+2y^2)} - \left(\frac{4}{(1+2x^2+2y^2)}\right)^2 y^2 \quad \text{(scambio } x \text{ e } y \text{...)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-4x\,4y}{(1+2x^2+2y^2)^2} + 1 = -\left(\frac{4}{(1+2x^2+2y^2)}\right)^2 xy + 1$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det = 16 - 1 > 0 \qquad a_{11} = 4 > 0$$

$(0,0)$ PTO DI MINIMO

$$Hf\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1-\frac{3}{4} & +\frac{3}{4}+1 \\ +\frac{3}{4}+1 & 1-\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \det < 0$$

SELLA

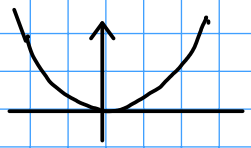
(Il 3° pto è simile)

$f(0,0) = 0$ $\qquad f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ln\left(1 + 2\frac{3}{4} + 2\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4} =$

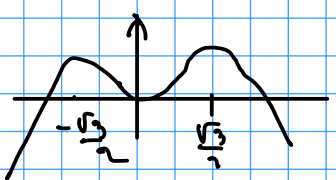
$$\ln(4) - \frac{3}{4}$$

PROVIAMO A FARE I GRAFICI DI $f(x,x)$ e $f(x,-x)$

$$f(x,x) = \ln(1+4x^2) + x^2$$



$$f(x,-x) = \ln(1+x^2) - x^2$$



PROVARE CON

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + 5y^3 - 3y$$