Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 19 7/11/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

$f(x,y,z) := xy\cos(z)$ Polinomio di Taylor in $(0,0,0) = 0$

Il modo più semplice è:

(1) vedo che $x = o(\|x,y,z\|)$ cioè $\frac{|x|}{\|(x,y,z)\|} \leq$ cost.; infatti

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \|(x,y,z)\|$$ DUNQUE

$$\frac{|x|}{\|(x,y,z)\|} \leq 1$$

STESSO DISCORSO: $y = o(\|(x,y,z)\|)$, $z = o(\|(x,y,z)\|)$

(2) $\cos(z) = 1 + o(z)$ $\left(= 1 - \frac{z^2}{2} + o(z^3)\right)$

(3) $f(x,y,z) = xy(1+o(z)) = xy + xy\,o(z) = xy + o(xyz) =$

(PROPRIETÀ degli o piccoli: $g\,o(f) = o(f\cdot g)$)

$= xy + o(o(\|x,z,z\|)\,o(\|x,y,z\|)\,o(\|x,y,z\|)) =$

$= xy + o(o(\|x,y,z\|^3)) =$

(PROPRIETÀ: $o(f)\cdot o(g) = o(f\cdot g)$)

$xy + o(\|(x,y,z)\|^3) \Rightarrow P_3(x,y,z) = xy \quad (= P_2(x,y))$

(PROPRIETÀ: $o(O(g)) = o(g)$)

NÉ POSSO DEDURRE CHE

$D_\alpha f(0,0,0) = 0$ per ogni α con $|\alpha| = 3$ cioè

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0,0) = 0$$

+ TUTTE QUELLE CON z ... (che ho dimenticato, per $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}$ ...)

- SE USO LO SVILUPPO DI $\cos(z)$ con l'ordine 2:

$$f(x,y,z) = xy\left(1 - \frac{z^2}{2} + o(z^3)\right) =$$

$$xy - xyz^2 + o(xyz^3) = xy - \frac{xyz^2}{2} + o(\|(x,y,z)\|^5)$$

($o(xyz^3) = o(\|(x,y,z)\|^5)$)

DUNQUE $P_5(x,y,z) = xy - \frac{xyz^2}{2}$. NE POSSO DEDURRE

$D_\alpha f(0,0,0) = 0$ se $|\alpha| = 5$ ← TERMINE CON $\alpha = (1,1,2)$

INOLTRE TUTTE LE DERIVATE $D_\alpha f(0,0,0)$ con $|\alpha| = 4$ FANNO ZERO TRANNE quella con $\alpha = (1,1,2)$ cioè

$$\frac{\partial^4}{\partial x \partial y \partial z^2} f(0,0,0) \neq 0$$

ANZI

$$\frac{1}{1!\,1!\,2!} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y \partial z^2} f(0,0,0) = -\frac{1}{2}$$

cioè

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z^2}(0,0,0) = -1$$

MASSIMI E MINIMI RELATIVI ("LIBERI")

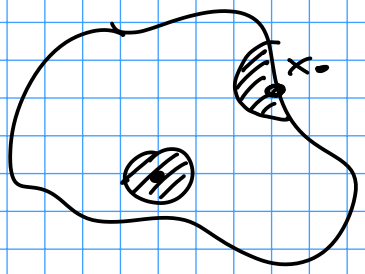
INGREDIENTI $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $x_0 \in \Omega$

DEF. Dico che x_0 è **PUNTO** di MAX (MIN) RELATIVO

Se esiste $r>0$ tale che

$$f(x) \le f(x_0) \qquad \left(f(x) \ge f(x_0) \right) .$$

$$\forall x \in \Omega \quad \|x - x_0\| < r$$



TEOREMA (di Fermat) Se x_0 è di max / min relativo per f. SE x_0 INTERNO a Ω. SE f è differenziabile in x_0 ALLORA

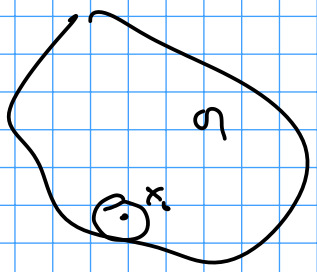
$$\boxed{\nabla f(x_0) = 0}$$

(basta $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ ...)

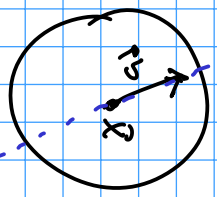
DIM. Prendo un raggio $r>0$ tale che:

(1) $f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in B(x_0, r)$ (x_0 MAX REL)

(2) $B(x_0, r) \subset \Omega$ (x_0 INTERNO)



Fisso una direzione $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$, $\|\vec{v}\| = 1$



e considero

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$$

Dato che $x_0 + t\vec{v} \in B(x_0, r)$ quando $|t| < r$ ho che

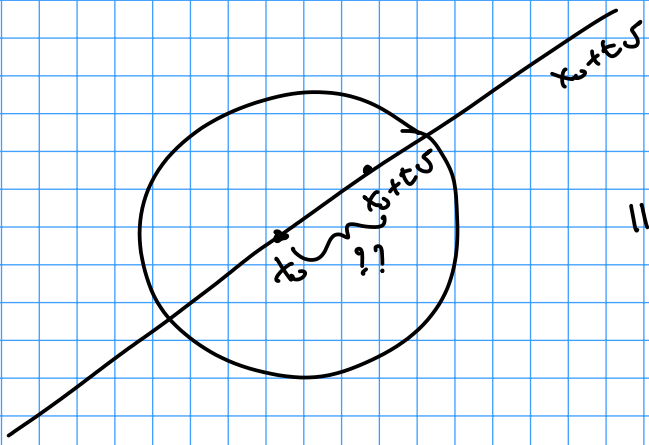
$$\varphi(t) \le \varphi(0) \; (= f(x_0)) \qquad \forall t \text{ c.c. } -r < t < r$$

cioè $t=0$ è di MAX nell'intervallo $]-r, r[$ $\Rightarrow \varphi'(0) = 0$

MA $\varphi'(0) = f'(x_0)(\vec{v})$. HO TROVATO

$f'(x_0)(\vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v}$ con $\|\vec{v}\| = 1$

Se prendo $\vec{v} = \vec{e}_i$ ne deduco $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$ e quindi $\nabla f(x_0) = 0$



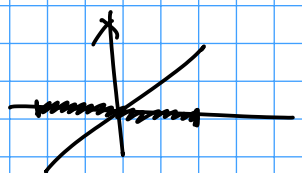
Ⓐ $\|x_0+tv-x_0\| = \|tv\| = t\|v\| = t$

DEF. Se $\nabla f(x_0) = 0$ dico che x_0 è **PUNTO STAZIONARIO** (o **PUNTO CRITICO**) per f.

Allora Fermat mi dice che

> x_0 PUNTO DI MAX/MIN INTERNO $\Rightarrow$ x_0 STAZIONARIO

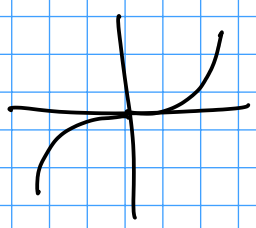
OSS (a) Se x_0 NON È INTERNO NON È DETTO CHE SIA STAZIONARIO



$\Omega = [-1,1] \quad f(x) = x$ -1 DI MIN, 1 DI MAX

$f'(-1) = f'(1) = 1 \neq 0$

(b) Se x_0 È STAZIONARIO NON È DETTO CHE SIA DI MAX/MIN Rel



$f(x) = x^3 \quad x_0 = 0 \quad f'(x_0) = 0$

x_0 NON È DI MAX/MIN

DOVREMO AFFRONTARE I PROBLEMI DERIVANTI DA (1) e (2)

RIGUARDO A (2) ABBIAMO DELLE CONDIZIONI PER CAPIRE SE UN PUNTO STAZ. È DI MAX/MIN (di ~~ESTREMO~~) relativo

TEOREMA Supponiamo Ω aperto e $f \in C^2(\Omega)$. Supponiamo $x_0 \in \Omega$

$$\nabla f(x_0) = \vec{0} \qquad (x_0 \text{ stazionario}).$$

(I) (condizione necessaria)

SE x_0 è di max/min relativo $\Rightarrow$ la matrice Hessiana $Hf(x_0)$ è semidefinita negativa / semidefinita positiva)

$$Hf(x) \leq 0 \quad / \quad Hf(x) \geq 0$$

(II) (condizione sufficiente)

(IIa) Se $Hf(x) \leq 0$ per $x \in B(x_0, r)$ $r>0$ opportuno

$(Hf(x) \geq 0)$

ALLORA x_0 è punto di max rel (min rel) per f.

(IIb) Se $Hf(x_0) < 0$: definita negativa $\Rightarrow$ x_0 pto di max (min) per f

$(Hf(x_0) > 0$: definita positiva$)$