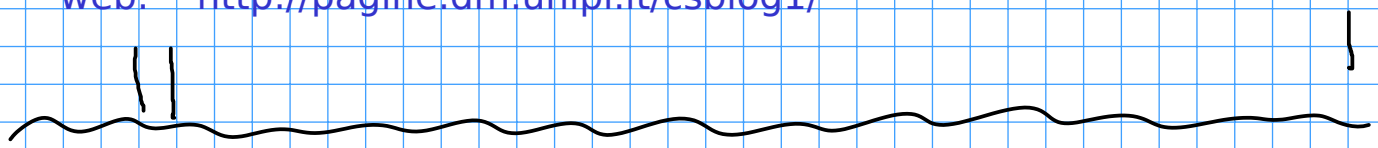
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 18 6/11/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/



$f(x,y) = x e^{xy}$ $\qquad f'''(P)(v_1,v_2,v_3) = -4$

$P=(0,0)$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

(visto molto presto, usando la definizione).

OSS. Supponiamo che f sia differenziabile n volte in x_0. Allora dati $v_1 \dots v_n \in \mathbb{R}^N$

$$f^{(n)}(x_0)(v_1 \dots v_n) = d^{(n)}(x_0)(v_1 \dots v_n) = \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{N} \dots \sum_{i_n=1}^{N} \frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} v_{1,i_1} \dots v_{n,i_n}$$

(*)

$v_{i,j}$ = componente j del vettore v_i

VEDIAMO QUESTA FORMULA NELL'ESEMPIO SCRITTO ALL'INIZIO

$f(x,y) = x e^{xy}$ $\qquad x_0 = (0,0)$ $\qquad n=3$ $\qquad N=2$

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Mi servono le derivate parziali terze nel punto $X_0 = (0,0)$

$$f'''(x_0)(v_1 v_2 v_3) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} v_{1i} v_{2j} v_{3k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} x e^{xy} = \underline{(1+xy)e^{xy}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underline{x^2 e^{xy}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (y + y + xy^2)e^{xy} = \underline{(2y + xy^2)e^{xy}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \underline{(2x + x^2 y)e^{xy}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \underline{x^3 e^{xy}} \quad \leftarrow \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} f = (y^2 + 2y^2 + xy^3)e^{xy} = \underline{(3y^2 + xy^3)e^{xy}}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f = (2 + 2xy + 2xy + x^2 y^2)e^{xy} = \underline{(2 + 4xy + x^2 y^2)e^{xy}}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f = (x^2 + 2x^2 + x^3 y)e^{xy} = \underline{(3x^2 + x^3 y)e^{xy}}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial y^3} f = \underline{x^4 e^{xy}}$$

LE CALCOLO IN $X_0 = (0,0)$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(0,0) = 0 \quad \boxed{\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(0,0) = 2} \quad \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(0,0) = 0 = \frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y^3}$$

$$f'''(x_0)(v_1, v_2, v_3) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x}(0,0) v_{11} v_{21} v_{31} + \frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x \partial x \partial y} v_{11} v_{21} v_{32} +$$

$$\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x \partial y \partial x} v_{11} v_{22} v_{31} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y}(0,0) v_{11} v_{22} v_{32} +$$

$$\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y \partial x \partial x} v_{12} v_{21} v_{31} + \frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y \partial x \partial y} v_{12} v_{21} v_{32} +$$

$$\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y \partial y \partial x} v_{12} v_{22} v_{31} + \frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y \partial y \partial y} v_{12} v_{22} v_{32} =$$

$$2\left(v_{11} v_{21} v_{32} + v_{11} v_{22} v_{31} + v_{12} v_{21} v_{31}\right) = 2 v_{11} v_{22} v_{31} =$$

$$2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-1) = \boxed{-4}$$

$$f'''(x_0)\,u\,v\,w = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} u_i v_j w_k$$

---

oss. Se prendo $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$

$(x_0 \in \Omega \,,\ \vec{v} \in \mathbb{R}^N)$

$\varphi'(t) = f'(x_0 + t\vec{v})(\vec{v})$ perché

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + (t+h)\vec{v}) - f(x_0 + t\vec{v})}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\overbrace{x_0 + t\vec{v}}^{P_t} + h\vec{v}) - f(\overbrace{x_0 + t\vec{v}}^{P_t})}{h} = f'(P_t)(\vec{v})$$

ITERANDO TROVO:

$$\varphi^{(m)}(t) = f^{(n)}(x_0 + t\vec{v})(\overbrace{\vec{v}, \vec{v}, \dots, \vec{v}}^{m \text{ volte}})$$

IN PARTICOLARE

$$\varphi^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_0)(\vec{v}, \dots \vec{v}) =: f^{(n)}(\vec{v}^{\,n})$$

NOTAZIONE

$$= \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_n=1}^{N} \frac{\partial^{(n)} f(x_0)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}} v_{i_1} \cdots v_{i_n} \qquad (\star\star)$$

Nel caso di $n = 2$

$$f''(x_0)(\vec{v}^{\,2}) \left(=: f''(x_0)(v, v)\right)$$ è UNA FORMA QUADRATICA RISPETTO A $\vec{v}$

che si può anche scrivere

$$f''(x_0)(\vec{v}^{\,2}) = \vec{v}^{\,t}\, H f(x_0)\, \vec{v}$$

$$= (v_1 \cdots v_N) \begin{pmatrix} \text{HESSIANO} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_N \end{pmatrix}$$

USANDO $\star\star$

Nell'esempio di prima $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

$$f'''(x_0)(v^3) = 2\left(v_x v_x v_y + v_x v_y v_x + v_y v_x v_x\right) =$$

6 $\nabla_x \nabla_x \nabla_y$

IN GENERALE CONVIENE CERCARE DI RAGGRUPPARE I TERMINI UGUALI NELLA FORMULA (★★)

DEFINIZIONE CHIAMO **N-multiindice** un vettore $\underbrace{(\alpha_1 \dots \alpha_N)}_{\alpha}$ dove gli α_i sono interi ≥ 0

Dato α multiindice chiamo **lunghezza** di α

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$$

Chiamo **fattoriale** di α $\quad \alpha! = \alpha_1! \, \alpha_2! \dots \alpha_N!$

Dato un vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$ definisco la **potenza α-ESIMA**

$$\vec{v}^{\,\alpha} = v_1^{\alpha_1} \cdot v_2^{\alpha_2} \cdots v_N^{\alpha_N}$$

Dato una funzione di N variabili $f(x_1 \dots x_N)$ $\left(\begin{matrix} f \in C^m \\ m = |\alpha| \end{matrix} \right)$

chiamo **derivata α-ESIMA**

$$D_\alpha f = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} (x_1 \dots x_N) \qquad \text{dove } m = |\alpha|$$

CONVENZIONE: se $\alpha_i = 0$ NON C'È $\frac{\partial}{\partial x_i}$

Se $\alpha = (0 \dots 0)$ $\quad D_\alpha f = f$

Si può introdurre il **coefficiente multinomiale** relativo ad α

$$\frac{|\alpha|!}{\alpha!} \quad \binom{|\alpha|}{\alpha_1 \dots \alpha_N}$$

IN QUESTO MODO SI TROVA

$$(x_1 + \dots + x_N)^m = \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

(se $N = 2$ i multiindici di lunghezza m sono $(k, m-k)$ $\rightsquigarrow$ FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

FATTO (questione combinatoria)

$$f^{(m)}(x_0)(\vec{v}^m) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D_\alpha f(x_0) \vec{v}^\alpha$$

(usando la $\star\star$ e raggruppando i termini uguali)

Nel caso $N=2$ $m=3$ quali sono gli α di lunghezza 3 ?!

$(3,0)$ $(2,1)$ $(1,2)$ $(0,3)$

$\frac{3!}{3!} = 1$ $\frac{3!}{2!1!} = 3$ 3 1

DUNQUE se $f = f(x_1, x_2)$ $(= f(x,y))$

$$f'''(x_0)(v^3) = \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x) v_x^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0) v_x^2 v_y + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0) v_x v_y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0) v_y^3$$

Nell'esempio viene $\frac{3 \partial^3 f(0,0)}{\partial x^2 \partial y} v_x^2 v_y = 6 v_x^2 v_y$

$$f^{(m)}(x_0)(\vec{v}^m) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D_\alpha f(x_0) \vec{v}^\alpha = \varphi^{(m)}(0)$$

con $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$

$$\sum_{|\alpha|=N} \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_N!} \frac{\partial^N f(x_0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}} v_1^{\alpha_1} \cdots v_N^{\alpha_N}$$

$\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_N)$ con $\alpha_1 + \dots \alpha_N = N$

Definizione Data f di classe C^k in Ω a valori reali. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Dato $x_0 \in \Omega$ $m \in \mathbb{N}$

CHIAMO Polinomio di Taylor di ordine m

nel punto x_0 (relativo a f) il polinomio (in N variabili $x_1 \dots x_N$) definito da

$$\sum_{|\alpha| \le n} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha =: P_{n,x_0}(x)$$

$$\left(\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_N \le N} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_N!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} f(x_0) (x-x_0)_1^{\alpha_1} \dots (x-x_0)_N^{\alpha_N} \right)$$

TEOREMA (Taylor con resto di Lagrange)

Se Ω è convesso. f è di classe $C^{n+1}(\Omega)$

$x_0 \in \Omega$ Allora:

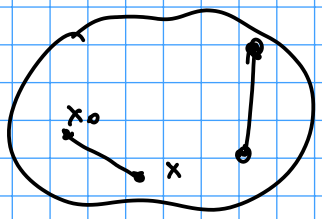
$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

DOVE il "resto" R_n ha la forma

$$R_{n,x_0}(x) = \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f\big(\underbrace{x_0 + \xi(x-x_0)}_{P_\xi}\big)(x-x_0)^\alpha$$

con $\xi \in]0,1[$ (il punto $x_0 + \xi(x-x_0)$ è sul segmento tra x_0 e x)

RICORDO: Ω convesso $\iff$ dati x_0 e x in Ω si ha $x_0 + t(x-x_0) = tx + (1-t)x_0 \in \Omega \ \forall t \in [0,1]$



DIM Basta considerare $\varphi(t) = f(x_0 + t(x-x_0))$

Applico Taylor con resto di Lagrange a φ, in $t_0 = 0$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + \dots + \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0)t^m + \frac{1}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\xi)\,t^{m+1}$$

con $\xi \in]0, t[$

Metto $t = 1$

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \dots + \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0) + \frac{1}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\xi)$$

MA $\frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0) = \frac{1}{k!}\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha$ ←

Se metto tutto insieme ho la formula. ☆

Nell'esempio di prima calcolare $P_3(x,y)$

$f(x,y) = x e^{xy}$ → 0 (in zero)

$\frac{\partial f}{\partial x} = (1+xy)e^{xy}$ → 1 (in zero)

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{xy}$ → 0

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2y + xy^2)e^{xy}$ → 0

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (2x + x^2 y)e^{xy}$ → 0

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^3 e^{xy}$ → 0

tutte le derivate terze sono zero (in $(0,0)$) tranne $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(0,0) = 2$

$$P_3(x,y) = 0 + x + 2 \cdot \frac{1}{(2,1)!}x^2 y = \boxed{x + x^2 y}$$

Ne segue che

$$x e^{xy} = x + x^2 y + \sum_{|\alpha|=4} \frac{1}{\alpha!} \underbrace{D^\alpha(\xi x, \xi y)}_{\text{LIMITATA (perché } f \in C^4)} (x,y)^\alpha$$

$\Rightarrow$ il resto è $R_3(x,y)$ o $R_4 = o(\|(x,y)\|^3)$ ← ◉

TEOREMA (Formula di Taylor con resto di Peano)

Ω aperto (non necessariamente convesso)

f di classe C^n $\Rightarrow$

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x)$$

con $\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n,x_0}(x)}{\|x - x_0\|^n} = 0$

NO DIM.

Se allora guardo il solito esempio dove quello che ho detto prima ☺

$$x e^{xy} = x + x^2 y + o(\|(x,y)\|^3)$$

Si poteva dedurlo facilmente dagli sviluppi di Taylor unidimensionali:

$$x e^{xy} = x\left(1 + xy + o(xy)\right) =$$

$$x + x^2 y + \underbrace{x\, o(xy)}_{R(x,y)} = o(x^2 y)$$

POSSO DIRE CHE $R = o(\|(x,y)\|^3)$??

È VERO SE SO CHE $\left|\frac{x^2 y}{\|(x,y)\|^3}\right| \leq$ costante ⊗

IN EFFETTI

$$|x \, xy| \leq |x| \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} \leq \sqrt{x^2+y^2}\, \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{\|(x,y)\|^3}{2}$$

FATTO (da aggiungere alla tesi di Taylor)

IL POLINOMIO $P_{n,x_0}(x)$ È L'UNICO che verifica la formula con resto di Peano

⊗ Se $\left|\frac{x^2 y}{\|(x,y)\|^3}\right| \leq C$ C costante $\Rightarrow$

$$\left|\frac{R(x,y)}{\|(x,y)\|^3}\right| = \left|\frac{R(x,y)}{x^2 y}\right| \frac{|x^2 y|}{\|(x,y)\|^3} \leq \frac{R(x,y)}{x^2 y} \cdot C$$

$\to 0$ per ipotesi

(Se $f = O(g)$ e $h = o(f)$

$\Rightarrow h = o(g)$)

PROVARE A CALCOLARE IL $P_3(x,y,z)$:- $x_0 = 0$

della funzione $f(x,y,z) = y \cdot x \cdot \cos(z)$

(sarà bonde...)