Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 17 31/10/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ x & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

DIFFERENZIABILITÀ ??

se $y \neq 0$ è differenziabile per motivi standard

CASO $y=0$. Cerco di dimostrare che è differenziabile. Fisso $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = 0$

(1) Provo con il diff. totale. MI SERVONO $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ in $(x_0, 0)$

(I) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,0) - f(x_0,0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

(II) $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\sin(x_0 y)}{y} - x_0}{y} =$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin(x_0 y) - x_0 y}{y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{x_0 y - \frac{1}{6} x_0^3 y^3 + o(y^3) - x_0 y}{y^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = 0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

ORA CALCOLO $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ per $y \neq 0$

(III) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}\cos(xy)\,y = \cos(xy)$

VEDO CHE $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} = \cos(x_0 \cdot 0) = 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ TESI

(IV) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\cos(xy)\cdot y - \sin(xy)}{y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{xy\cos(xy) - \sin(xy)}{y^2} = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} x^2 \frac{xy\cos(xy) - \sin(xy)}{(xy)^2}$$

$$= x_0 \lim_{t\to 0} \frac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^2} = 0 \qquad (\text{se } (x,y)\to(x_0,0) \Rightarrow xy \to 0)$$

(*)

Infatti (*) $= \frac{t\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) - t + o(t^2)}{t^2} = \frac{o(t^2)}{t^2} \to 0$

~ 0

DUNQUE ANCHE $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$

PER IL TEOREMA DEL DIFF. TOTALE $\Rightarrow$ f è differenziabile

2 MODO (usando la definizione) . I punti I e II sono gli stessi

(III) $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\frac{\sin(xy)}{y} - x_0 - (x-x_0) - 0\cdot(y-0)}{\left((x-x_0)^2 + y^2\right)^{1/2}} = 0$??

$\Updownarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\sin(xy) - x_0 y - (x-x_0)y}{y\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}} = 0 \;??$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\sin(xy) - xy}{y\sqrt{(x_0-x)^2 + y^2}} = 0 \;??$$

$$|(*)| = \left|\frac{-\frac{1}{6}x^3y^3 + o(x^3y^3)}{y\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}\right| \le \frac{\frac{1}{6}(xy)^3 + o((xy)^3)}{y^2} \to 0$$

2 MODO (PIÙ SEMPLICE DI TUTTI)

Chiamo $F(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ per $t \neq 0$ $\quad F(0) = 1$

Si sa che F è derivabile e che $F'(0) = 0$ (problema di Analisi)

$$\frac{F(t)-F(0)}{t} = \frac{\frac{\sin(t)}{t} - 1}{t} = \frac{\sin(t) - t}{t^2} \to 0$$

VERO CHE $\boxed{f(x,y) = xF(xy)}$ ← A QUESTO PUNTO LA DIFFER. È CONSEGUENZA DEI TEOREMI

ESERCIZIO SULLE DERIVATE DIREZIONALI MULTIPLE

$f(x) = x e^{xy}$ $\qquad P_0 = (0,0)$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f'''(P_0)(v_1, v_2, v_3) = ??$

$\boxed{P = (x,y)}$

APPLICANDO LA DEF.

$$f'(P)(v_3) = \frac{d}{dt} f(P + t v_3)\Big|_{t=0} = \nabla f(P) \cdot v_3 =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P)(-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(1) = \quad \left(v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} + xy e^{xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{xy}$$

$$f'(P)(v_3) = -(1+xy) e^{xy} + x^2 e^{xy} = (x^2 - xy - 1) e^{xy}$$

DEVO DERIVARE QUESTA ESPRESSIONE LUNGO v_2

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - xy - 1) e^{xy} = (2x - y) e^{xy} + y(x^2 - xy - 1) e^{xy} =$$

$$(yx^2 - xy^2 - y + 2x - y) e^{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-xy-1\right)e^{xy} = (-x)\,e^{xy} + x\left(x^2-xy-1\right)e^{xy} =$$

$$\left(x^3-x^2y-x-x\right)e^{xy}$$

$$g''(P)(v_2,v_3) = e^{xy}\left[\left(yx^2-xy^2+2x-2y\right)(0)+\left(x^3-x^2y-2x\right)(2)\right] =$$

$$2e^{xy}\left(x^3-x^2y-2x\right) = g(x,y)$$

QUESTO LO DERIVO LUNGO v_1 (e mette $P=P_0$)

$$\frac{\partial}{\partial x}\,2\left(x^3-x^2y-2x\right)e^{xy} = 2\left[\left(3x^2-2xy-2\right)+y\left(x^3-x^2y-2x\right)\right]e^{xy}$$

$$= 2\left(yx^3-x^2y^2+3x^2-2xy-2x-2\right)e^{xy}$$

METTO $x=0$, $y\to\infty$ TROVO $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \boxed{-4}$

$$\frac{\partial}{\partial y}g(x,y) = 2e^{xy}\left(-x^2+x\left(x^3-x^2y-2x\right)\right)$$

$\dfrac{\partial}{\partial y}g(0,0) = 0$ E QUINDI

$$g'''(P_0)(v_1,v_1,v_2) = \begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}v_1 = \begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \boxed{-4}$$