Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 16 30/10/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Esercizio sulla differenziabilità

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \quad \text{se } (x,y)\neq(0,0), \qquad f(0,0)=0$$

DIFFERENZIABILITÀ DI f. SÌ se $(x,y)\neq(0,0)$ (teorema standard) Il punto da discutere è in $(0,0)$!!

SCOMMETTIAMO SULLA DIFF. Posso ragionare in due modi

(1) applico la definizione. NOTO CHE $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

(f è nulla sia sull'asse x che sull'asse y). Dunque la diff. in $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\|(x,y)-(0,0)\|}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$$

Se uso $|xy| \le (x^2+y^2)/2$ trovo

$$\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \le \frac{1}{4}\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{4}(x^2+y^2)^{1/2} \to 0$$

DUNQUE f è differenziabile nell'origine.

(2) In alternativa posso provare a usare il teor. del diff. totale

Dunque calcolo, per $(x,y) \neq (0,0)$, le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2) - x^2y^2 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = (*)$$

(e $\frac{\partial f}{\partial y}$ è analogo – scambio x e y)

Per usare il teorema devo vedere se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \left(\text{lo stesso per } \frac{\partial f}{\partial y} \ldots\right)$$

VEDO CHE $|(*)| \le \frac{(x^2+y^2)|y^3|}{(x^2+y^2)^2} = |y|\frac{y^2}{x^2+y^2} \le |y| \to 0$

$2|xy| \le x^2+y^2$

DUNQUE ANCHE CON IL T. DIFF. TOT OTTENGO LA TESI

$\frac{xy}{x^2+y^2}$, 0 in $(0,0)$

HA $f'(0,0)\vec{v}$ se $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$f(x,y) = |xy|$ DIFF. IN $(0,0)$?!

(f NON È DIFF. DI SICURO NEI PUNTI $(x_0,0)$ e $(0,y_0)$ $\ast$ $x_0 \neq 0$ / $y_0 \neq 0$. Infatti in questi punti f non ha $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ / non ha $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$.

Se fisso $x = x_0$ trovo $g(x_0, y) = |x_0|\,|y|$ ← NON DERIVABILE
$y = y_0$ trovo $g(x, y_0) = |x|\,|y_0|$ ← IN ZERO

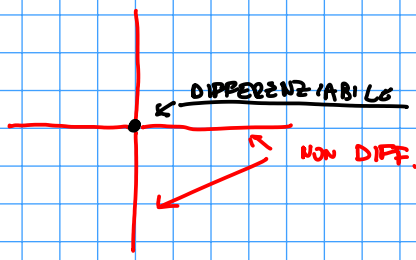
Cerco di applicare la def. di differenziabilità. NOTA

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ dato che $f(x,0) = f(0,y) = 0$

DUNQUE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\|(x,y)-(0,0)\|} =$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\circledast} = 0$ perché $|xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow |\circledast| \le \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \to 0$



$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ x & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

DIFF. ??

DERIVATE SECONDE

Ricordiamo che, se $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ (o da $\Omega \to \mathbb{R}^M$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$) e $X_0 \in \Omega$ il diff di f in X_0 è una applicazione da $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$. Se f è differenziabile in ogni X

$\Rightarrow$ mi ritrovo una applicazione $df: \mathbb{R}^N \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$

$\left(\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M) = \{\text{applicazioni lineari da } \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M\}\right)$

DEF. (naturale) CHIAMO DIFFERENZIALE SECONDO IL DIFFERENZIALE di df – Per fare questa def. devo avere una NORMA in

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ ← USO LA NORMA DELLE APPL. LINEARI

$\|L\| =$ minimo k tale che $\|Lx\| \le k\|x\|$

DUNQUE HA SENSO DEFINIRE

$$d^2 f(x_0) = d(df)(x_0)$$

$\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$

È UNA $L : \mathbb{R}^N \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$. Allora date due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ posso fare

$$\big(\underbrace{d(df)(x)(\vec{v})}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)}\big)(\vec{w}) \quad \leftarrow \text{È BILINEARE RISPETTO A } \vec{v} \text{ e } \vec{w}$$

e allora posso anche scrivere

$$d^2 f(x_0)(\vec{w}, \vec{v}) := \big(d(df)(x_0)(\vec{v})\big)(\vec{w})$$

QUESTO $d^2 f(x_0)$ "VA D'ACCORDO" CON LE DERIVATE DIREZIONALI SECONDE.

DEF. Data $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$, dato $x_0 \in \Omega$, dati $\vec{w}, \vec{v} \in \mathbb{R}^N$ dico che f ammette derivata direzionale lungo $(\vec{w}, \vec{v})$ se

$\exists\ f'(x)(\vec{v})$ per x vicino a x_0 e

$x \mapsto f'(x)(\vec{v})$ ha derivata direzionale lungo $\vec{w}$

IL RISULTATO di queste derivazioni iterate si scrive

$$f''(x_0)(\vec{w}, \vec{v}) \quad \big(f'(x)(\vec{v})\big)'(x_0)(\vec{w})$$

TEOREMA Se f è differenziabile 2 volte in $x_0 \Rightarrow$

$$f''(x)(\vec{w}, \vec{v}) = d^2 f(x)(\vec{w}, \vec{v})$$

è bilineare in $(\vec{w}, \vec{v})$

(NON LO DIMOSTRO).

DEF Chiamo derivata parziale 2ª rispetto a x_i e a x_j in x_0

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = f''(x_0)(\hat{e}_j, \hat{e}_i) \quad \left(= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)(x_0)\right)$$

CONSEGUENZA Se f è diff. due volte in x_0

$$d^2 f(x_0)(\vec{w}, \vec{v}) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)\, w_j v_i$$

$(\vec{v} = (v_1 \dots v_N)$, $\vec{w} = (w_1, \dots w_N)$

OSS. IN TUTTO QUESTO DISCORSO IL PUNTO CHIAVE È CHE $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)) \sim$ APPLICAZIONI BILINEARI DA $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

TEOR (Conseguenza del diff. totale). Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ esistono in un intorno di x_0 e sono continue in $x_0 \Rightarrow$

$\exists\ d^2 f(x_0)$

DEF Se f è diff. due volte in x_0, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, allora

$$Hf(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_N} \end{pmatrix},$$

è una matrice $N \times N$ detta MATRICE HESSIANA di f in x_0. Si ha

$$f''(x_0)(\vec{w}, \vec{v}) = d^2 f(x_0)(\vec{w}, \vec{v}) = \vec{w}^{\,t} \cdot Hf(x_0) \cdot \vec{v}$$

(PRODOTTI MATRICIALI)

NOTAZIONE Scrivo $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ invece di $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$

IN GENERALE $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

Per esempio se prendo:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si vede che $f(x,y)$ è DIFFERENZIABILE UNA VOLTA ANCHE IN $(0,0)$

INOLTRE AMMETTE DERIVATE II^e FUORI DA $(0,0)$

VEDIAMO SE ESISTE le derivate II^e in $(0,0)$

PRIMA DI TUTTO MI SERVONO LE DERIVATE PRIME

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - xy(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$\frac{3x^4y + 3x^2y^3 - x^2y^3 - y^5 - (2x^4y - 2x^2y^3)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$y\,\frac{(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\,\frac{(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2+y^2)^2} = x\,\frac{(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

Se $(x,y)=(0,0)$ viene da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Vediamo $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ in $(0,0)$!!

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{0}) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{0}) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\partial f(x,0)}{\partial y} - \underbrace{\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}}_{=0}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^2}\bigg|_{y=0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4} = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{0}) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\vec{0}) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) =$$

$$\lim_{y\to 0}\ \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^2}\bigg|_{x=0} = \lim_{y\to 0}\frac{-y^4}{y^4} = -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

DUNQUE IN QUESTO ESEMPIO $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$!

TEOREMA Se $\exists\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ per x vicino a x_0 e le derivate seconde sono CONTINUE in x_0 $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$$

DUNQUE IN QUESTO CASO $Hf(x_0)$ È UNA MATRICE SIMMETRICA

DIM. Faccio solo il caso in 2 variabili. CHIAMO

$$\Delta(x,y) := f(x,y) - f(x_0,y) - f(x,y_0) + f(x_0,y_0)$$

e chiamo $\Phi_x(y) := f(x,y) - f(x_0,y)$

VEDO CHE $\Delta(x,y) = \Phi_x(y) - \Phi_x(y_0)$ ← USO LAGRANGE

$$\Delta(x,y) = (y-y_0)\,\Phi_x'(\eta) \qquad \text{con } \eta \text{ tra } y \text{ e } y_0$$

$$(y-y_0)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta)\right)$$

(per come è definita Φ_x)

↖ RIAPPLICO LAGRANGE ORA RISPETTO A x

$$(y-y_0)(x-x_0)\,\frac{\partial}{\partial x}(\quad)(\xi)$$

ξ tra x_0 e x

$$\Delta(x,y) = (y-y_0)(x-x_0)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta)$$

[η tra y e y_0, ξ tra x e x_0]

Posso fare gli stessi calcoli scambiando x e y...

$$\Delta(x,y) = (x-x_0)(y-y_0)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi',\eta')$$

[η' tra y e y_0, ξ' tra x e x_0]

OTTENGO (semplifico $(x-x_0)(y-y_0)$)

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(\xi',\eta')$$

Se faccio tendere $(x,y) \to (x_0,y_0)$ OTTENGO

$(\xi,\eta) \to (x_0,y_0)$ $\qquad (\xi',\eta') \to (x_0,y_0)$

PER LA CONTINUITÀ DELLE DER. II

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(\xi,\eta) \to \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0,y_0) \qquad \Big/ \qquad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(\xi',\eta') \to \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x_0,y_0)$$

Dob che e'eguale passo al limite TROVO

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$$ ≠

QUANTO FATTO PER LE DER. SECONDE SI PUÒ ITERARE ALLE DERIVATE m-ESIME. SI POSSONO DEFINIRE

① Derivate direzionali m-esime

$$f^{(m)}(x_0)(v_1,\dots,v_m)$$

② Differenziale m-ESIMO che è una applicazione a m argomenti

$$d^{(m)} f(x_0)(v_1 \dots v_n) \qquad m-\text{LINEARE}$$

(cioè lineare in ogni argomento)

③ Derivate parziali $\frac{\partial^m}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}} f(x_0) = f^{(m)}(x_0)(\hat{e}_{i_1}\cdots\hat{e}_{i_m})$

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}} f(x_0)$$

FATTO Se tutte le derivate parziali fino all'ordine m esistono e sono continue in un punto $x_0 \Rightarrow$

- f è m-diff. in x_0.
- $d^{(m)} f(x_0)(\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_m) = f^{(m)}(x_0)(\vec{v}_1;\dots;\vec{v}_n)$

questa espressione è "simmetrica" cioè

$$f^{(m)}(x_0)(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_i,\dots,\vec{v}_j,\dots\vec{v}_n) = f^{(m)}(x_0)(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_j,\dots,\vec{v}_i,\dots\vec{v}_n)$$

(*)

CONVENZIONE LE DERIVATE $\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}$ le scrivo mettendo gli indici in ordine crescente e raggruppando

gli indici eguali, cioè

$$\frac{\partial^{(n)}}{\partial x_1^{m_1}\,\partial x_2^{m_2}\cdots\partial x_n^{m_n}} \qquad m_1+m_2+\cdots+m_n=n$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z\partial x\partial y\partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\,\partial y\,\partial z}$$