Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 15 25/10/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Differenziale → Matrice Jacobiana

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(x_0) \end{pmatrix}$$

Def Dico che f è di classe C^1 su Ω ($f \in C^1(\Omega)$) se esistono tutte le derivate parziali $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ $\forall x \in \Omega$ e sono continue in Ω.

Dal th. diff. totale $\Rightarrow$ se f è $C^1(\Omega) \Rightarrow f$ è diff. in $\forall x \in \Omega$

e $f'(x_0)(\vec{v}) = \underbrace{J_f(x_0)\,\vec{v}}_{\text{PRODOTTO RIGHE x COLONNE}}$ $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$

NOTAZIONE ALTERNATIVA scrivo

$$J_f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial(f_1 \cdots f_M)}{\partial(x_1 \cdots x_N)} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1\cdots M \\ j=1\cdots N}}$$

TEOREMI DI CALCOLO

(1) Se $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^N$ sono differenziabili in $x_0 \in \Omega$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\lambda f + \mu g$ è diff. in x_0 e

$$d(\lambda f + \mu g)(x_0) = \lambda\, df(x_0) + \mu\, dg(x_0) \quad / \quad J_{\lambda f + \mu g}(x_0) = \lambda J_f(x_0) + \mu J_g(x_0)$$

oppure $$\frac{\partial (\lambda f + \mu g)}{\partial x}(x_0) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) + \mu \frac{\partial g}{\partial x}(x_0)$$

(2) $g, f : \Omega \to \mathbb{R} \Rightarrow f \cdot g : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\nabla (f \cdot g)(x_0) = g(x_0) \nabla f(x_0) + f(x_0) \nabla g(x_0)$$

Più in generale si ha: se $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \to \mathbb{R}^M$, allora $f \cdot g : \Omega \to \mathbb{R}^N$ e si ha $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$

$$\to \quad d(f \cdot g)(x_0)(\vec{v}) = \underbrace{df(x_0)(\vec{v})}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{g(x_0)}_{\in \mathbb{R}^M} + \underbrace{f(x_0)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{dg(x_0)(\vec{v})}_{\in \mathbb{R}^N}$$

IN TERMINI DI MATRICI JACOBIANE

$$J_{f \cdot g}(x_0) = \underbrace{J_f(x_0) \otimes g(x_0)}_{\swarrow \; ??} + f(x_0) J_g(x_0)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} g_1 & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_N} g_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} g_M & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_N} g_M \end{pmatrix}$$

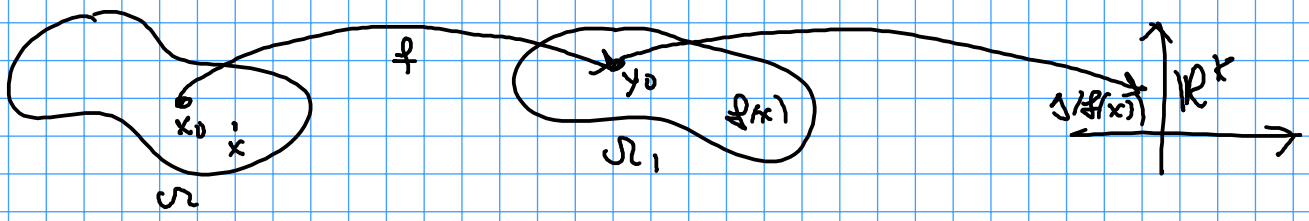
Dati due vettori $(v_1 \cdots v_N)$ e $(w_1 \cdots w_N)$

$v \otimes w = (v_i w_j)$

(3) Se $f : \Omega \to \Omega_1$ $\quad \Omega \in \mathbb{R}^N$ $\quad \Omega_1 \in \mathbb{R}^M$ $\quad x_0 \in \Omega$

$g : \Omega_1 \to \mathbb{R}^k$ $\quad y_0 := f(x_0) \in \Omega_1$

f differenziabile in x_0, g differenziabile in y_0



ALLORA $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ è differenziabile in x_0 e si ha:

$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad d(g\circ f)(x_0)(\vec{v}) = dg(y_0)\left(df(x_0)(\vec{v})\right)$ cioè

$$d(g\circ f)(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0)$$

IN TERMINI DI MATRICI JACOBIANE:

$$J_{g\circ f}(x_0) = J_g(y_0) \cdot J_f(x_0) \quad \left(\text{cioè } \frac{\partial (g\circ f)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}(y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\right)$$

DIMOSTRO (3) Dalle ipotesi so che

- $f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x-x_0) + Rf(x, x_0)$

  dove $\lim_{x\to x_0} \frac{Rf(x,x_0)}{\|x-x_0\|_n} = 0$ $\quad (Rf(x,x_0) \in \mathbb{R}^m)$ (Differenziabilità di f in $x = x_0$)

- $g(y) = g(y_0) + dg(y_0)(y-y_0) + Rg(y, y_0)$

  dove $\lim_{y\to y_0} \frac{Rg(y,y_0)}{\|y-y_0\|_m} = 0$ $\quad (Rg(y,y_0) \in \mathbb{R}^k$ (Differenziabilità di g in $y \to y_0$)

$\Rightarrow g(f(x)) = g(y_0) + dg(y_0)(f(x) - f(x_0)) + Rg(f(x)-f(x_0)) =$ ($y_0 = f(x_0)$)

$$g(y_0) + dg(y_0)\left(df(x_0)(x-x_0) + Rf(x,x_0)\right) +$$

$$Rg(df(x_0)(x-x_0) + Rf(x,x_0)) =$$

$$g(f(x_0)) + dg(y_0)\,df(x_0)(x-x_0) + R(x,x_0) \quad \text{dove}$$

$$R(x,x_0) = dg(y_0)\,Rf(x,x_0) + Rg\left(\underbrace{df(x_0)(x-x_0) + Rf(x,x_0)}_{(\star)}\right)$$

Vedo che $\frac{\|R(x,x_0)\|}{\|x-x_0\|} \le \|dg(y_0)\| \frac{\|Rf(x,x_0)\|}{\|x-x_0\|} + \frac{\|Rg(\star)\|}{\|\star\|} \underbrace{\frac{\|(\star)\|}{\|x-x_0\|}}_{\le}$

$$\leq \|dg(y_0)\| \underbrace{\frac{\|R_f(x,x_0)\|}{\|x-x_0\|}}_{\downarrow\, 0} + \frac{\|R_g(\star)\|}{\|\star\|} \frac{\|df(x_0)\|\,\|x-x_0\|}{\|x-x_0\|} + \frac{\|R_f(x,x_0)\|}{\|x-x_0\|} =$$

$$\leq \text{costante} \underbrace{\frac{\|R_f(x,x_0)\|}{\|x-x_0\|}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{\|R_g(\star)\|}{\|\star\|}}_{\downarrow\, 0} \text{ costante}$$

per ipotesi dato che $\star \to 0$ se $x \to x_0$

DUNQUE $R(x,x_0) = o(\|x-x_0\|) \Rightarrow$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + \underbrace{dg(y_0)\, df(x_0)}_{d(g\circ f)(x_0)}(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)$$

TESI

Dal teorema di composizione vedo che

$$C = \frac{\partial g\circ f}{\partial x}(x_0) = \overset{A}{\frac{\partial g(y_0)}{\partial y}} \cdot \overset{B}{\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}}$$

MATRICE $K \times N$ MATRICE $K \times M$ MATRICE $M \times N$

IN TERMINI DI COMPONENTI

$$c_{ih} = \sum_{j=1}^{M} a_{ij} b_{jh} \qquad i = 1 \dots K \quad h = 1 \dots N$$

$$c_{ih} = \frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_h}(x_0) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y_0) \frac{\partial f_j}{\partial x_h}(x_0)$$

Derivata della composizione

$$\boxed{\frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{h=1}^{M} \frac{\partial g_i}{\partial y_h}(y_0) \frac{\partial f_h}{\partial x_j}(x_0)} \qquad \begin{array}{l} i = 1 \dots K \\ j = 1 \dots N \end{array}$$

ESEMPI (1) Supponiamo $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{R}^M$

(derivata lungo una curva)

$f : \Omega \to \mathbb{R}$

Considero $\varphi(t) = f(\gamma(t))$ $\quad \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))$

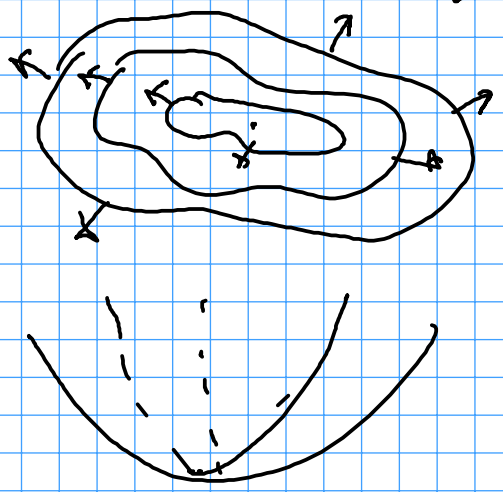
$N=1$, $K=1$ $\qquad \varphi'(t_0) = \frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t_0) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_h}(\gamma(t_0)) \frac{d\gamma_h(t_0)}{dt}$

$t_0 \in [a,b]$ $\quad (x_0 = t_0,\ y_0 = f(t_0))$

LO POSSO INTERPRETARE $\boxed{\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)}$

ALLORA se $\underbrace{f(\gamma(t))}_{\varphi}$ è costante $\Rightarrow \nabla f(\gamma(t)) \perp \gamma'(t)$

$\sim$ se γ è uno curva di livello ∇f è perpendicolare



(BUCA!!)

ESEMPIO $\quad p(x) = \|x\|^{\alpha}$ $\qquad p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$\alpha > 0$

$p(x) = \left(x_1^2 + \dots + x_N^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}$ $\qquad (x_0 \neq \vec{0})$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\alpha}{2}\left(x_1^2 + \dots + x_N^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_1^2 + \dots + x_N^2\right)\Big|_{x=x_0}$$

$$\frac{\alpha}{2}\left(x_1^2 + \dots + x_N^2\right)^{\frac{\alpha-2}{2}} 2x_i \Big|_{x=x_0} =$$

$$\alpha \|x\|^{\alpha-2} x_i \Big|_{x=x_0}$$

DUNQUE $\boxed{\nabla p(x_0) = \alpha \|x_0\|^{\alpha-2} x_0}$ $\qquad$ se $x_0 \neq 0$

LA FORMULA VALE ANCHE IN $x_0 = \vec{0}$ se $\alpha > 1$, nel senso che

$$\nabla p(\vec{0}) = \vec{0} \quad \text{se} \quad \alpha > 1$$

Infatti $\|\nabla p(x)\| = \alpha \|x\|^{\alpha-1} \to 0$ se $\alpha > 1$

Dato che le derivate parziali sono continue $\Rightarrow$ p è differenziabile in $\forall x_0 \neq \vec{0}$ e anche in $x_0 = \vec{0}$ quando $\alpha > 1$.

Prendiamo $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ $\quad \Omega \subset \mathbb{R}^K$ e prendiamo

$$g(y) := \|f(y)\|^\alpha = p(f(y)) \qquad \left(g : \Omega \subset \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}\right)$$

$\nabla g = ??$ RAGIONIAMO COMPONENTE PER COMPONENTE

$$\frac{\partial g}{\partial y_i}(y) = \frac{\partial}{\partial y_i} p(f(y)) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial p}{\partial x_j}(f(y)) \frac{\partial f_j}{\partial y_i}(y) =$$

$(i = 1 \dots K)$

$$= \sum_{j=1}^{N} \alpha \|f(y)\|^{\alpha-2} f_j(y) \frac{\partial f_j}{\partial y_i}(y) =$$

$\left(\frac{\partial p}{\partial x_j}(x) = \alpha \|x\|^{\alpha-2} x\right)$

$$\alpha \|f(y)\|^{\alpha-2} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial y_i}(y) f_j(y) =$$

IN TERMINI DI GRADIENTE

$$\nabla g(y) = \alpha \|f(y)\|^{\alpha-2} \underbrace{\left(J_f(y)\right) \underbrace{f(y)}_{\in \mathbb{R}^N}}_{\mathbb{R}^K}$$

SE $\alpha = 2$ $\quad g(y) = \|f(y)\|^2 \Rightarrow$

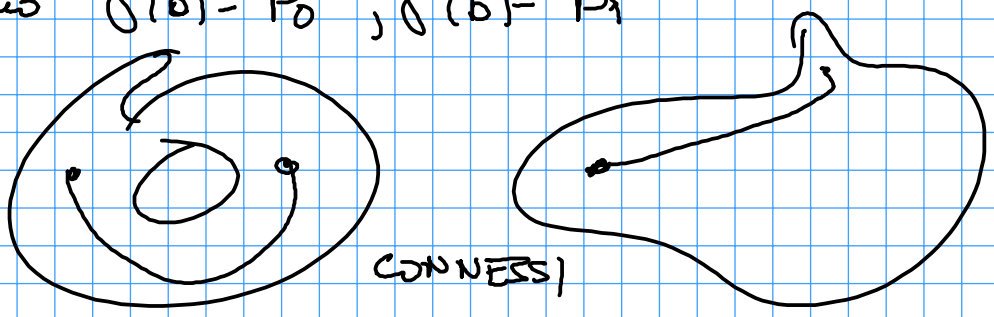
$$\nabla g = 2 J_f(y)^t f(y)$$

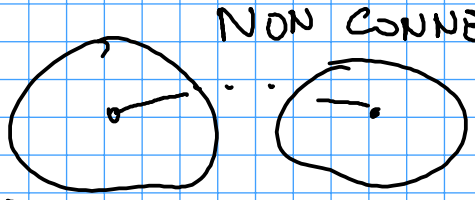
FATTO f costante su Ω $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0 \Rightarrow \nabla f(x) = 0$

Viceversa Se $\nabla f(x) = 0 \ \forall x \in \Omega \Rightarrow f$ è costante su Ω

A PATTO CHE Ω sia CONNESSO

Def. Dico che Ω è CONNESSO se per ogni coppia di punti $P_0, P_1 \in \Omega$ esiste uno curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$, γ continua $\gamma(0) = P_0$, $\gamma(b) = P_1$





FATTO Se Ω è APERTO connesso posso prendere γ di classe C^1 (non la dimostro)

PROP. Se Ω è un aperto connesso, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\nabla f(x) = \vec{0}$ $\forall x \in \Omega \Rightarrow$ f è costante in Ω.

Dim. Fisso $x_0 \in \Omega$.

Dato un qualunque $x \in \Omega$ considero $\gamma : [a,b] \to \Omega$, C^1, tale che $\gamma(a) = x_0$ $\gamma(b) = x$.

Allora $\varphi(t) = f(\gamma(t))$ è C^1 e $\varphi'(t) = \underbrace{\nabla f(\gamma(t))}_{=0} \gamma'(t)$

$\Rightarrow \varphi'(t) = 0$ $\forall t \in [a,b] \Rightarrow$ (ANALISI 1) $\varphi(t) = \varphi(a)$ $\forall t \in [a,b]$, in particolare $\varphi(1) = \varphi(0) \Rightarrow$

$$f(x) = f(x_0)$$

Questo è vero per ogni $x \Rightarrow f$ è costante !! //