Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 14 24/10/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Differenziale di f in x_0 è "quello" applicazione lineare da $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)$$

e si ha: $f'(x_0)(\vec{v}) = df(x_0)\vec{v} \qquad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$

Teor. (diff. totale) Se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ esistono vicino a x_0 e sono continue in $x_0 \Rightarrow$ f è diff in $x_0 \Rightarrow$

$$f'(x_0)\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, v_i \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$$

ALTRO ESEMPIO $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{xy}$. È chiaro che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\, e^{xy} + (x^2+y^2)\, y\, e^{xy} = e^{xy}\left(2x + x^2 y + y^3\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\, e^{xy} + (x^2+y^2)\, x\, e^{xy} = e^{xy}\left(2y + x^3 + xy^2\right)$$

QUESTE DERIVATE SONO CONTINUE RISPETTO A (x,y)

Perché $(x,y) \mapsto x$ e $(x,y) \mapsto y$ sono continue e le formule sopra sono continue rispetto a x e rispetto a y

Per il teorema del differenziale totale f è differenziabile in $\forall (x,y)$ (qui Ω è $\mathbb{R}^2$). Per esempio prendiamo $P_0 = (2,-2)$

$$\Rightarrow \quad f(P_0) = f(2,-2) = (4+4)e^{-4} = 8e^{-4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = e^{-4}\left(\underset{4}{2\cdot 2} + \underset{-8}{2^2(-2)} + \underset{-8}{(-2)^3}\right) = -12e^{-4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = e^{-4}(-4+8+8) = 12e^{-4}$$

IL PIANO TANGENTE AL GRAFICO DI f nel punto $\overbrace{(2,-2,8e^{-4})}^{P_0, f(P_0)} \in \mathbb{R}^3$

è dato dall'equazione $z = \underset{\uparrow f(P_0)}{8e^{-4}} \underset{\uparrow \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)}{-12e^{-4}} \underset{\uparrow x-x_0}{(x-2)} \underset{\uparrow \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)}{+12e^{-4}} \underset{\uparrow y-y_0}{(y+2)}$

$x_0 = 2 \quad y_0 = -2$. Le derivate direzionali di f in P_0 sono

$$f'(P_0)(\vec{v}) = -12e^{-4}v_x + 12e^{-4}v_y \qquad (\star)$$

IL DIFFERENZIALE $df(P_0)$ è l'applicazione lineare individuata da $(\star)$

$$df(P_0)\vec{v} = -12e^{-4}v_x + 12e^{-4}v_y = \begin{pmatrix} -12e^{-4} \\ 12e^{-4} \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$$

$\cdot$ PRODOTTO SCALARE IN $\mathbb{R}^2$

TORNANDO ALLE DEF. GENERALI

$df(x_0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ LINEARE (con le prop. dette sopra)

Posso rappresentare $df(x_0)$ con una matrice J_f tale che

$$f'(x_0)(\vec{v}) = df(x_0)\vec{v} = J_f \cdot \vec{v} \qquad (J \text{ è } M \times N)$$

$\cdot$ PRODOTTO TRA MATRICI — $\vec{v}$ è una colonna

Chi è J_f ?! Ricordo che se A è una matrice, $\Rightarrow$ le sue componenti a_{ij} sono date da $\boxed{(A\hat{e}_j)_i = a_{ij}}$ $\quad \hat{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$

$A\hat{e}_j$ = colonna j-esima di A $\quad \begin{pmatrix} A_1 \cdots A_j \cdots A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j = A_j$

$$\Rightarrow \quad (J_j)_{ij} = \left(f'(x_0)\hat{e}_j\right)_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\right)_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$$

DUNQUE $\quad J_f = J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(x_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(x_0) \end{pmatrix}$

J si chiama MATRICE JACOBIANA DI f nel PUNTO x_0

e pe d'oppiù $\quad f'(x_0)(\vec{v}) = df(x_0)\vec{v} = J_f(x_0) \cdot \vec{v}$

↑ PRODOTTO RIGHE × COLONNE

Nell'esempio di prima $J_f(P_0) = \left(-12e^{-4}, 12e^{-4}\right)$
$(N=2, M=1)$

IN GENERALE POTREI CONSIDERARE DUE SPAZI VETTORIALI NORMA X e X_1, un aperto Ω in X e una funzione $f: \Omega \to X_1$. Si definisce (NELLO STESSO MODO)

$f'(x_0)\vec{v}$ e il differenziale $df(x_0)$

(SE LA DIMENSIONE È INFINITA DEVO CHIEDERE CHE $df(x_0)$ SIA CONTINUA IN $\vec{v}$)

NON HANNO SENSO QUI LE DERIVATE PARZIALI PERCHÉ NON HO UNA BASE CANONICA

SE $M=1$ $\quad J_f(x_0)$ è una matrice $1 \times N$ (riga)
il suo trasposto $J_f(x_0)^t$ è un vettore $N \times 1$ - lo chiamo

GRADIENTE DI f in x_0

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)^t$$

dunque $J_f(x_0)\,\vec{v} = \nabla f(x_0) \cdot \vec{v}$

PRODOTTO SCALARE

(IN GENERALE se $L : X \to \mathbb{R}$ X vettoriale con un prodotto scalare (DIM $< +\infty$ OPPURE IPOTESI), L lineare posso trovare un vettore $\vec{w}$ tale che $L\vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{v}$.
DUNQUE IL GRADIENTE DI f è quel vettore di X che rappresenta il differenziale)

SIGNIFICATO GEOMETRICO DI $\nabla f(x_0)$ (f a valori in $\mathbb{R}$)

so CHE $f'(x_0)\,\vec{v} = \nabla f(x_0) \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$

SUPPONIAMO $\nabla f(x_0) \neq \vec{0}$ e poniamo $\hat{w} := \dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$

$$\Rightarrow f'(x_0)\,\hat{w} = \nabla f(x_0) \cdot \hat{w} = \frac{\nabla f(x_0) \cdot \nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} = \frac{\|\nabla f(x_0)\|^2}{\|\nabla f(x_0)\|} = \|\nabla f(x_0)\|$$

D'altra parte se $v \in \mathbb{R}^N$ $\|v\| = 1$

$$f'(x_0)\,v = \nabla f(x_0) \cdot v \leq \|\nabla f(x_0)\| \cdot \|v\| = \|\nabla f(x_0)\|$$

MI DICE CHE $\|\nabla f(x_0)\|$ è il massimo delle derivate direzionali lungo $\vec{v}$ con $\|\vec{v}\| = 1$

LA DIREZIONE $\hat{w} = \dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ è la direzione $\vec{v}$, con $\|\vec{v}\| = 1$

rispetto alla quale $f'(x_0)\,\vec{v}$ è massimo.