Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 13 23/10/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Derivate direzionali:

ESEMPIO $f(x,y) = e^{xy}$. Vediamo quanto fa

$f'(2,1)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad P_0 = (2,1) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ (nello i vettori in colonna)

$\left(f'(P_0)(\vec{v})\right)$

Seguendo la definizione devo fare

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(P_0 + h\vec{v}) - f(P_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left((2,1) + h\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) - f(2,1)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{(2+h)(1+2h)} - e^{(2\cdot 1)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{2+5h+2h^2} - e^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} e^2 \frac{e^{5h+2h^2} - 1}{h} = e^2 \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1} + 5h + 2h^2 + o(5h+2h^2) - \cancel{1}}{h} =$$

$$e^2 \lim_{h\to 0} \frac{5h + o(h)}{h} = 5e^2 = f'(P_0)(\vec{v})$$

ANCORA PIÙ SEMPLICE: $f(x,y) = e^{xy}$, $P_0 = (2,1)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \hat{e}_2$

$$f'(P_0)(\hat{e}_2) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{2\cdot(1+h)} - e^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{2+2h} - e^2}{h} = 2e^2$$

Se calcolo $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \left.\frac{\partial e^{xy}}{\partial x}\right|_{in\,P_0} = \left. y e^{xy}\right|_{P=P_0} = 2e^2$

IN EFFETTI $\lim_{h\to 0} \frac{f((x_0,y_0)+h\hat{e}_2)-f(x_0,y_0)}{h} =$

$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0(y_0+h)} - e^{x_0y_0}}{h} = e^{x_0y_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0h}-1}{h} =$

$x_0 e^{x_0y_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$

ABBIAMO VERIFICATO NELL'ESEMPIO CHE $\frac{\partial f}{\partial y}(P) = f'(P)(\hat{e}_2)$

ANALOGAMENTE $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = f'(P)(\hat{e}_1)$

NOTA SE SAPESSI che $f'(P)(\vec{v})$ è lineare in $\vec{v}$

e se $\vec{v} = v_x\hat{e}_1 + v_y\hat{e}_2$ (cioè $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$)

$\Rightarrow$ $f'(P)(\vec{v}) = v_x f'(P)(\hat{e}_1) + v_y f'(P)\hat{e}_2 =$

$v_x \frac{\partial f}{\partial x}(P) + v_y \frac{\partial f}{\partial y}$

IN QUESTO ESEMPIO ($P_0 = (2,1)$) LE COSE TORNANO:

$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 1\cdot e^{2\cdot 1} = e^2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 2\cdot e^{2\cdot 1} = 2e^2$

Se prendo $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e faccio $1\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + 2\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) =$

$e^2 + 2\cdot 2e^2 = 5e^2$ $\leftarrow$ quello di prima

DEF. Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}^M$ $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto $x_0 \in \Omega$.

Dico che f è **DIFFERENZIABILE** in x_0 se valgono

(1) $\exists\ f'(x_0)(\vec{v})$ $\quad \forall v \in \mathbb{R}^N$

(2) La funzione $\vec{v} \mapsto f'(x_0)(\vec{v})$ sia LINEARE

$\left(f'(x_0)(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda f'(x_0)(\vec{v}) + \mu f'(x_0)(\vec{w}) \right)$

(3) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = 0$ $\quad (*)$

LA PROPRIETÀ (*) dice che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R(x,x_0) \quad \text{dove}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x,x_0)}{\|x-x_0\|} = 0 \quad \text{o anche}$$

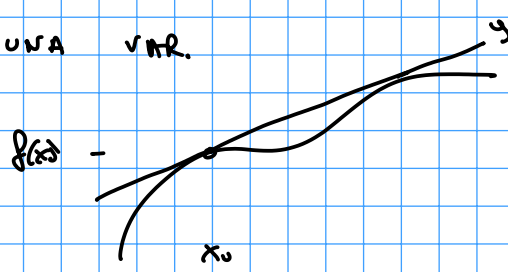
$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{COSTANTE}} + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{LINEARE IN } (x-x_0)} + o(\|x-x_0\|)$$

DUNQUE (*) dice che f differisce da una funzione AFFINE a meno di ordini superiori a $x-x_0$

DUNQUE LA FUNZIONE $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ ($y \in \mathbb{R}^M$, $x \in \mathbb{R}^n$)

HA COME GRAFICO IL "PIANO" TANGENTE AL GRAFICO DI f in $(x_0, f(x_0))$

(IN UNA VAR.



Per esempio – AMMETTIAMO CHE LA $f(x,y) = e^{xy}$ SIA DIFFERENZIABILE IN $P_0 = (2,1)$ – ALLORA ($P = (x,y)$)

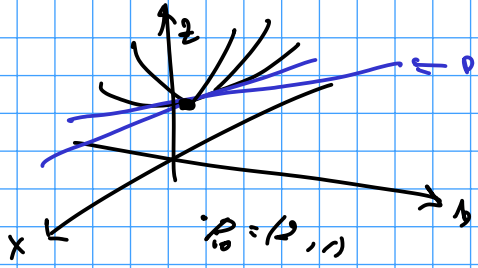
$$e^{xy} = \underbrace{e^2}_{f(P)} + \underbrace{f'(P_0)(x-x_0, y-y_0)}_{f(x_0,y)} = e^2 + f'(2,1)(x-2, y-1) + o(\|P-P_0\|)$$

$$= e^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-1) + o(\|P-P_0\|) =$$

$$e^2 + e^2(x-2) + 2e^2(y-1) + o(\|P-P_0\|) \sim$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = e^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2e^2 \right)$$

$$e^2 \left(1 + (x-2) + 2(y-1) + o(\|P-P_0\|) \right.$$



← PIANO TANGENTE DI EQUAZIONE

$$z = e^2 + e^2(x-2) + 2e^2(y-1)$$

DUNQUE IN GENERALE SE f è diff. in $x_0 \Rightarrow$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

è l'equazione dell'IPERPIANO TANGENTE

e $f'(x_0)(x-x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)(x_1-x_1^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_N}(x_0)(x_N-x_N^0)$

(LINEARITÀ DELLA DERIVATA DIREZIONALE)

SUPPONIAMO CHE f sia differenziabile in x_0

Notazione Chiamo "differenziale" di f in x_0 la funzione lineare $\vec{v} \longmapsto f'(x_0)(\vec{v})$ e la indico con $df(x_0)$

DUNQUE $df(x_0)\vec{v} = f'(x_0)(\vec{v})$

($df: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ ed è lineare)

PROPRIETÀ' f differenziabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

DIM. So che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = 0$$

($df(x_0)(x-x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$)

Allora esiste $r > 0$ tale che $\forall\, x \in B(x_0, r)$

$$\left\| \frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x-x_0)}{\|x-x_0\|_N} \right\|_M \leq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x-x_0)\|_M \leq \|x-x_0\|_N \leftarrow$$

ALLORA (DIS TRIANG.)

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x-x_0)\| +$$

$$\|df(x_0)(x-x_0)\| \leq$$

$$\|x-x_0\| + \|df(x_0)(x-x_0)\| \leq$$

$$\|x-x_0\| + \|df(x_0)\|\,\|x-x_0\| = (1+\|df(x_0)\|)\|x-x_0\|$$

NORMA DELL'APPL. LINEARE $df(x_0)$

DUNQUE $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ f CONTINUA.

(L lineare : $\|L\| = \max\{\|Lx\| \quad \|x\|=1\}$)

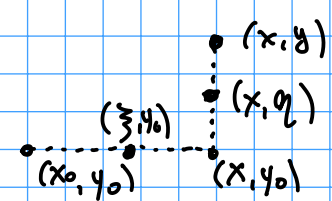
<u>TEOREMA</u> (del differenziale totale) Se $f:\Omega\to\mathbb{R}^N$, se esistono $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\cdots\frac{\partial f}{\partial x_N}(x)$ per ogni $x\in\Omega$ e se queste derivate parziali sono continue in un punto $x_0\in\Omega$ $\Longrightarrow$ f è differenziabile in x_0.

<u>DIM.</u> Caso $N=2$ $M=1$

[$f = f(x,y)$ punto (x_0,y_0) e so che $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ esistono e sono continue in (x_0,y_0)]

DEVO DIMOSTRARE $(*)$ cioè che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$



(1) $f(x,y_0)-f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0)(x-x_0)$

(USO LAGRANGE). dove $\xi=\xi(x,y_0)$ TRA x_0 E x

(2) $f(x,y)-f(x,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)(y-y_0)$ (di nuovo LAGRANGE)

con $\eta=\eta(x,y)$ compreso tra y_0 e y

SOMMO (1)+(2) $\Longrightarrow$

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x,y),y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta(x,y))(y-y_0)$$

$$\Delta(x,y) := f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) =$$

$$(x-x_0)\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)}_{A} + (y-y_0)\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)}_{B}$$

$$= \begin{pmatrix} A(x,y) \\ B(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\Delta(x,y)\| \le \left\| \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right\| \|x-x_0\| \Rightarrow$$

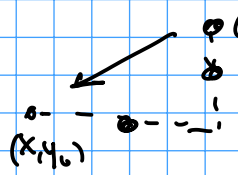
$$\frac{\|\Delta(x,y)\|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \le \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2}}$$

TENDE A ZERO

PERCHÉ $(\xi,y_0) \to (x_0,y_0)$ quando $(x,y) \to (x_0,y_0)$

$(x,\eta) \to (x,y_0)$

E PERCHÉ LE DER. PARZIALI SONO CONTINUE IN (x_0,y_0)



HO DIMOSTRATO LA PROPRIETÀ $(\star)$

PER LE (1) e (2), C'È' UN FATTO GENERALE

PROP. Se VALE $(\star)$ NEL SENSO CHE esiste $L: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ LINEARE tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = 0 \qquad (\star)_L$$

$\Rightarrow \exists\ f'(x_0)(\vec{v})\ \forall \vec{v}$ e a ho

$f'(x_0)(\vec{v}) = L\vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$

DUNQUE (1) $\circ$ (2) seguono da $(\star)_L$ e L è

univocamente determinato.

Dim. Se $\exists$ due tali $(*)_L \Rightarrow$ per ogni $\vec{v} \neq 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\vec{v}) - f(x_0) - L(h\vec{v})}{|h|\,\|\vec{v}\|} = 0$$

($h L\vec{v}$)

(se esiste il limite $\Rightarrow$ esiste il limite sulle rette $x = x_0 + h\vec{v}$ ed è lo stesso)

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h\vec{v}) - f(x_0)}{h} = L\vec{v} \qquad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$$

MA se prendo $-\vec{v}$ ottengo anche

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 - h\vec{v}) - f(x_0)}{h} = -L\vec{v} \qquad \text{cambio } s = -h$$

$$\lim_{s \to 0^-} \frac{f(x_0 + s\vec{v}) - f(x_0)}{s} = L\vec{v}$$

mettendo insieme i due limiti $\Rightarrow$

$$f'(x)(\vec{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\vec{v}) - f(x_0)}{h} = L\vec{v} \quad \text{(ciò che volevo)}$$

Esempio

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \qquad f(0,0) = 0$$

$P_0 = (0,0) = \vec{0}$

ABBIAMO VISTO CHE f è CONTINUA IN $\vec{0}$

$$0 \leq |f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2 + y^2}\,|y| \leq \frac{1}{2}|y| \xrightarrow{(x,y) \to \vec{0}} 0$$

VEDIAMO SE è diff. CALCOLIAMO $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

PANNO ENTRAMBE ZERO ($f(0,y) = f(x,0) = 0 \quad \forall x, \forall y$)

Se fosse diff. $\Rightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0\ ?!$$

$\|(x,y)\|^3$

Proviamo a mettere $(x,y) = t(v_x\ v_y)$ $\Rightarrow$

$$\frac{f(tv_x, tv_y)}{t^3\|(v_x,v_y)\|^3} = \frac{t^3 v_x v_y^2}{t^3\|(v_x,v_y)\|^3} = \frac{v_x v_y^2}{(v_x^2+v_y^2)^{3/2}} \neq 0$$

NON È DIFFERENZIABILE

PROVIAMO A FARE LE DERIVATE PARZIALI DI f IN $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{y^2(x^2+y^2) - xy^2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{2xy(x^2+y^2) - xy^2\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

NON TENDONO A ZERO SE $(x,y) \to (0,0)$

Lo posso verificare facendo i limiti nella retta $(x,y) = t(v_x, v_y)$

IN EFFETTI NON POSSONO ESSERE CONTINUE IN $(0,0)$

e se fossero, per il teorema del diff. tot. $\Rightarrow f$ diff. in $(0,0)$

ATTENZIONE IL TEOR. DEL DIFF. TOTALE È CONDIZIONE SUFFICIENTE

($\frac{\partial f}{\partial x_i}$ potrebbero non essere continue, ma $\exists\, df(x_0)$)