Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

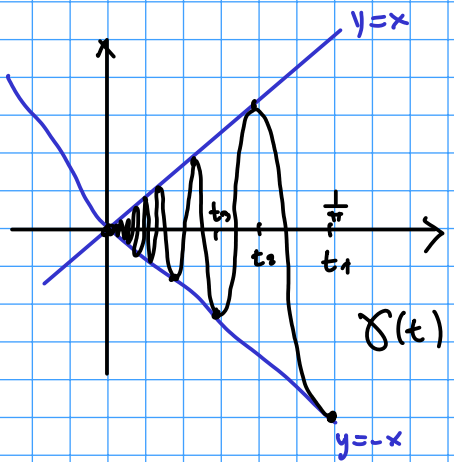
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 12 18/10/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

CURVE E INTEGRALI CURVILINEI (cont.)

RIGUARDO A $\ell_G(\gamma)$ Vediamo un esempio che mostra come sia possibile che una curva continua abbia lunghezza infinita



$$\gamma(t) = (t, t\cos(1/t)) \quad \text{se } t \neq 0$$
$$\gamma(0) = (0, 0) \quad \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{\pi}$$

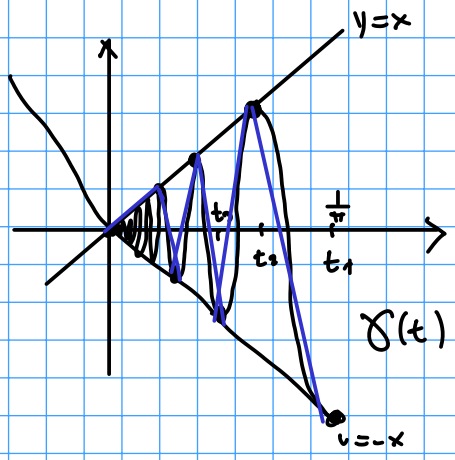
Per esempio se $t_n = \frac{1}{n\pi}$

$$\gamma(t_n) = \left(t_n, t_n \cos(n\pi)\right) = \left(t_n, (-1)^n t_n\right) = \frac{1}{n\pi}\left(1, (-1)^n\right)$$

DICO CHE $\ell_G(\gamma) = +\infty$. In effetti dato $n \geq 1$

prendiamo $\sigma_n = \{0, t_n, t_{n-1}, \dots, t_1 \leftarrow \frac{1}{\pi}\}$. Data la suddivisione

$\sigma_n \to$ la lunghezza della spezzata corrispondente



$$\ell(\gamma,\sigma_n) = \|\gamma(t_n)\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \geq$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left\| \left(t_{i+1}, (-1)^{i+1} t_i\right) - \left(t_i, (-1)^i t_i\right) \right\| =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(t_{i+1}-t_i)^2 + (t_{i+1}+t_i)^2} \geq$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} |t_{i+1}+t_i| = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{i+1} + \frac{1}{i}\right) \geq$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$$

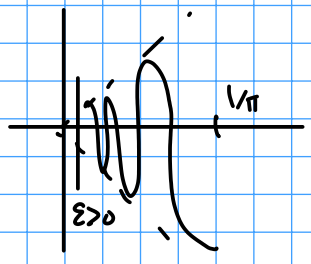
DUNQUE

$$\forall n \quad \ell_G(\gamma) \geq \ell(\gamma,\sigma_n) \geq \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$$

$$\Rightarrow \quad \ell_G(\gamma) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty$$

COME GIÀ DETTO SI PUÒ CHE $\ell_G(\gamma) = \ell(\gamma)$ QUANDO γ È C^1. L'ESEMPIO SOPRA SI POTEVA ANCHE TRATTARE INTEGRANDO $\|\gamma'(t)\|$ (con un pò di lavoro...)

$$\ell_G(\gamma) \geq \ell_G(\gamma_\varepsilon) \quad \text{dove} \quad \gamma_\varepsilon = \gamma \text{ su } [\varepsilon, 1/\pi]$$



γ_ε è C^1

$$\int_\varepsilon^{1/\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_\varepsilon^{1/\pi} \sqrt{1 + (\quad)^2}\, dt \geq$$

$$\gamma'(t) = \left(1, \cos\left(\frac{1}{t}\right) + t\left(-\frac{1}{t^2}\right)\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \left(1, \cos\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

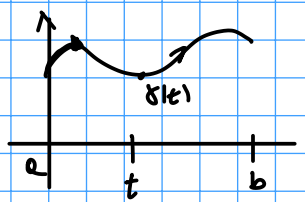
PEZZO NON INTEGRABILE VICINO A ZERO

$$\int_\varepsilon^{1/\pi} \left|\cos\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| dt$$

CON UN PÒ DI PAZIENZA SI VEDE CHE L'INTEGRANDO NON È INTEGRABILE A CAUSA DI $\frac{1}{t}$

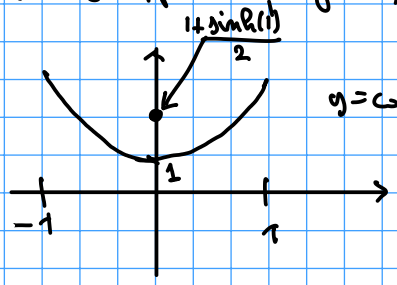
Dato che $\varepsilon \to 0$ e viene $\ell_G(\gamma) \geq \int_0^{1/2\pi} \|\gamma'(t)\| = +\infty$

CASO DEI GRAFICI. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Dico che γ è un grafico (γ si intende) se $\gamma(t) = (t, f(t))$ con $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (oppure $\gamma(t) = (f(t), t)$ ...)



Se f è $C^1 \Rightarrow \gamma$ è C^1 e $\gamma'(t) = (1, f'(t)) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$

Per esempio $f(t) = \cosh(t)$ ha -1 e 1. $\gamma(t) = (t, \cosh(t))$



$\gamma'(t) = (1, \sinh(t)) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2(t)}$

$= \sqrt{\cosh^2(t)} = \cosh(t) > 0$

CALCOLIAMO $\ell(\gamma) = \int_{-1}^{1} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{-1}^{1} \cosh(t)\, dt = \sinh(t)\Big|_{-1}^{1}$

$= 2\sinh(1)$

TROVIAMO IL BARICENTRO $\overline{P} := \int_\gamma (x,y)\, ds = (\overline{x}, \overline{y})$

$\overline{x} = \int_\gamma x\, ds = \int_{-1}^{1} t\sqrt{1+\gamma'(t)^2}\, dt = \int_{-1}^{1} t\cosh(t)\, dt = 0$ (l'integrando è dispari)

$\overline{y} = \int_\gamma y\, ds = \int_{-1}^{1} \cosh(t)\sqrt{1+\gamma'(t)^2}\, dt = \int_{-1}^{1} \cosh^2(t)\, dt =$

$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh(2t)\right) dt = 1 + \frac{1}{4}\left[\sinh(2t)\right]_{-1}^{1} = 1 + \frac{1}{4}\, 2\sinh(1) =$

$= 1 + \frac{1}{2}\sinh(1)$

$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) = \cosh^2(t) + \cosh^2(t) - 1 = 2\cosh^2(t) - 1$

$\Leftrightarrow \cosh^2(t) = \frac{1 + \cosh(2t)}{2}$

PIÙ IN GENERALE posso chiamare "GRAFICO" una curva

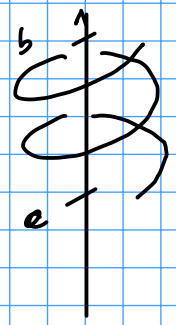
$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ del tipo $\gamma(t) = (t, \hat{\gamma}(t))$ dove $(a \le t \le b$

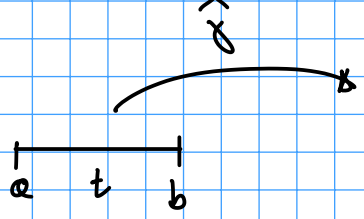
$\hat{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^{N-1}$

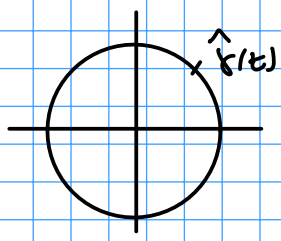
Per esempio l'elica (riparametrizzata) descritta da

$\gamma(t) = (\cos(\omega t), \sin(\omega t), t)$ è un grafico

((x,y) in funzione di z) di $(x,y) = (\cos(\omega z), \sin(\omega z)) = \hat{\gamma}(z)$







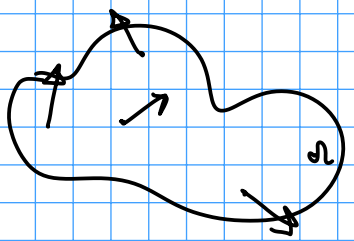
Anche in questo caso $\|\gamma'\| = \sqrt{1 + \|\hat{\gamma}'(t)\|^2}$

INTEGRALI DI II^a SPECIE (INTEGRALE DI UN CAMPO SU UNA CURVA)

Def. Chiamo "CAMPO" una funzione $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ dove

Ω è un aperto di $\mathbb{R}^N$ (in particolare e in ogni caso ha la stessa dimensione)

IN OGNI PUNTO DI Ω c'è un vettore



Def. Dato un arco C^1 (C^1 a tratti) a valori in Ω e dato un campo continuo $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$, definisco l'integrale (di II^a specie) di $\vec{f}$ su γ

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\, dt \quad \leftarrow$$

$\bullet$ PRODOTTO SCALARE

(IDEA: se $\vec{f}$ è un campo di forze l'integrale rappresenta il lavoro di $\vec{f}$ sul percorso individuato da γ)

$$\left(\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_\gamma f_\gamma \, ds \right.$$

$$\left. \text{dove } f_\gamma = \text{componente di } \vec{f} \text{ sulla tangente a } \gamma \right)$$

FATTI

- $\int_\gamma (\lambda \vec{f} + \mu \vec{g})\cdot d\vec{s} = \lambda \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} + \mu \int_\gamma \vec{g}\cdot d\vec{s}$

- Se $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$ φ cambio di parametro C^1 allora

$$\int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \begin{cases} \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} & \text{se } \varphi \text{ mantiene il verso} \\ -\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} & \text{se } \varphi \text{ scambia il verso} \end{cases}$$

($\varphi(c)=a$, $\varphi(d)=b$ $\Rightarrow$ $\varphi' \geq 0$)

($\varphi(c)=b$, $\varphi(d)=a$ $\Rightarrow$ $\varphi' \leq 0$)

- $\left| \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} \right| \leq \int_\gamma \|\vec{f}\| \, ds \quad \left(\leq \max_{a\leq t\leq b} \|\vec{f}(t)\| \; \ell(\gamma) \right)$

OMETTIAMO LA DIM.

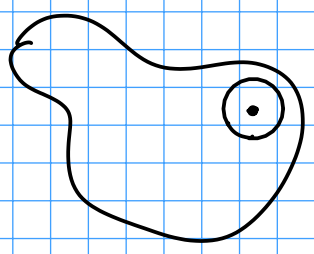
DERIVAZIONE IN PIÙ VARIABILI

Ingredienti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ APERTO, $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$, $x_0 \in \Omega$

cioè $f = (f_1, \dots, f_M)$ con $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $\qquad (x_1^0, \dots, x_N^0)$

Ricordo che Ω aperto $\Leftrightarrow$ $P_0 \in \Omega$ esiste un intorno $B(P_0, r) \subset \Omega$ $(r>0)$

(se c'è un punto $\Rightarrow$ ci sono i "obbligatori" vicini)

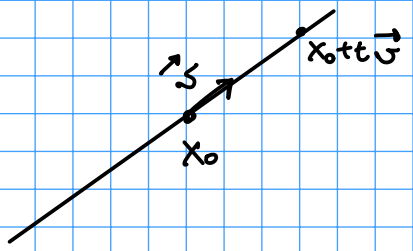


Def. (Derivate direzionali) Dato $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ chiamo "derivata di f in x_0 lungo $\vec{v}$" il limite (se esiste)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h\vec{v})-f(x_0)}{h} =: f'(x_0)(\vec{v}) \in \mathbb{R}^M$$

HA SENSO PERCHÉ $x_0+th \in \Omega$ se h è piccolo

IL NUMERATORE È IN $\mathbb{R}^M$ e il denominatore è in $\mathbb{R}$



$f'(x_0)(\vec{v})$ è la derivata della funzione $\varphi(t) := f(x_0+t\vec{v}) \in \mathbb{R}^M$ in $t=0$

φ è la restrizione di f sulla retta $x = x_0 + t\vec{v}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

NOTA (φ è una curva in $\mathbb{R}^M$).

Def. (Derivate parziali) Data una coordinata x_i $(i=1\dots N)$

definisco $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \dfrac{d}{dx} f(x_1^0 \dots \underset{\uparrow}{x} \dots x_N^0)$ calcolata in $x = x_i^0$

$\uparrow$ i-esimo argomento

Se $N=2$ scrivo $\dfrac{\partial}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial}{\partial y}$ in luogo di $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ $\dfrac{\partial}{\partial x_2}$

Se $N=3$ scrivo $\dfrac{\partial}{\partial x}$ $\dfrac{\partial}{\partial y}$ $\dfrac{\partial}{\partial z}$ in luogo di $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ $\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ $\dfrac{\partial}{\partial x_3}$

NOTA $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = f'(x_0)(\hat{e}_i)$ dove $\hat{e}_i = (0,\dots,\underset{\uparrow}{1},\dots 0)$

$\uparrow$ i-esimo posto

(dato che $f(x_0+t\hat{e}_i) = f(x_1^0 \dots x_i^0+t \dots x_N^0)$)

Dunque le derivate parziali sono delle particolari derivate direzionali.

IN UNA VARIABILE SI HA
- f derivabile $\Rightarrow$ f continua
- Se f è derivabile $\Rightarrow$ ho senso la retta tangente al grafico di f

$(y = f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0))$

IN N VARIABILI (IN PARTENZA!) posso trovare qualcosa di simile ?!

DOMANDE POSSIBILI: (1) Se $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ $i=1\dots N$ $\Rightarrow$ f continua **NO**

(2) Se ci sono $f'(x_0)(\vec{v})$ $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N \Rightarrow f$ continua **NO** !!

ESEMPIO $f(x,y) = \dfrac{x^M}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ $\quad f(0,0) = 0$

$(N=2, M=1)$ ABBIAMO GIÀ VISTO CHE f NON È CONTINUA IN $(0,0)$ $\quad \left(f(x, mx) = \dfrac{m}{1+m^2} \right.$ cambio con m $\left.\right)$

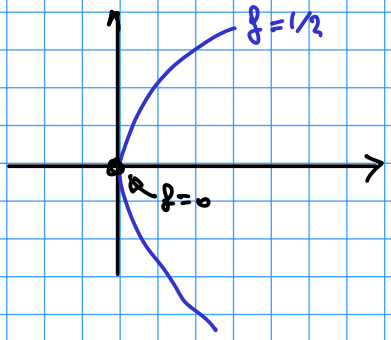
MA $\quad f(x,0) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$f(0,y) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

DUNQUE IN $(0,0)$ entrambe le derivate parziali esistono e fanno 0 (PERÒ f non è continua).

ALTRO ESEMPIO $\quad \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} = f(x,y)$, $0 = f(0,0)$

Anche in questo caso f non è continua in $(0,0)$ – per vederlo si considera la restrizione su $x = y^2 \Rightarrow f(y^2, y) = \dfrac{y^4}{2y^4} = \dfrac{1}{2} \neq 0$



Fissiamo $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ e cerchiamo

$$f'(0,0)(\vec{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0)+h(v_x,v_y)) - f(0,0)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(hv_x, hv_y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{hv_x (hv_y)^2}{((hv_x)^2 + (hv_y)^4)h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^3 v_x v_y^2}{h^3 (v_x^2 + h^2 v_y^4)} = \lim_{h \to 0} \frac{v_x v_y^2}{v_x^2 + h^2 v_y^4}$$

se $v_x \neq 0$ $\quad = \dfrac{v_x v_y^2}{v_x} = \dfrac{v_y^2}{v_x}$

se $v_x = 0, v_y \neq 0$ $\quad = 0$

(se $v_x = v_y = 0$ $\quad = 0$ già dall'inizio)

$$f'(0,0)(v_x, v_y) = \begin{cases} \dfrac{v_y^2}{v_x} & \text{se } v_x \neq 0 \\ 0 & \text{se } v_x = 0 \end{cases}$$

DUNQUE le derivate direzionali esistono, ma f è discontinua $(X_0 = (0,0))$

NOTA nell'ultimo esempio

$f'(0,0)(\vec{v})$ NON è lineare in $\vec{v}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = f'(0,0)(\hat{e}_1) \Rightarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = f'(0,0)(\hat{e}_2) \Rightarrow$

ma $f'(0,0)(1,1) = 1$ $\quad$ (anche se $(1,1) = (1,0) + (0,1)$)