Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 11 17/10/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

INTEGRALI CURVILINEI (cont.)

Prop Se $\gamma : [a,b] \to A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ f continua è chiaro che $K := \max_{a \le t \le b} |f(\gamma(t))|$ esiste perché $f(\gamma(t))$ è continua.

Allora $$\left| \int_\gamma f \, ds \right| \le K \, \ell(\gamma) = \max_{[a,b]} |f \circ \gamma| \, \ell(\gamma)$$

Basta notare che

$$\left| \int_\gamma f \, ds \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt \right| \le K \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = K \, \ell(\gamma)$$

SI PUÒ ANCHE INTEGRARE UNA FUNZIONE VETTORIALE $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^N$ su γ, dove $\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)$ ($f_i : A \to \mathbb{R}$ componente i-esima di $\vec{f}$)

$$\int_\gamma \vec{f} \, ds = \left(\int f_1 \, ds, \dots, \int f_N \, ds \right)$$

SI INTEGRA COMPONENTE PER COMPONENTE (il risultato è un vettore di $\mathbb{R}^N$)

Esempio Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$ (σ è la "densità") ALLORA (γ descrive un "filo" in $\mathbb{R}^3$)

$$M(\gamma) = \int_\gamma \sigma \, ds = \text{massa del "filo"}$$

$$(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{M(\gamma)} \underbrace{\int_\gamma \sigma(x,y,z)(x,y,z)\, ds}_{\text{integrale curvilineo di } \vec{f}(x,y,z) = \sigma(x,y,z)(x,y,z)} \leftarrow \text{"centro di massa del filo"}$$

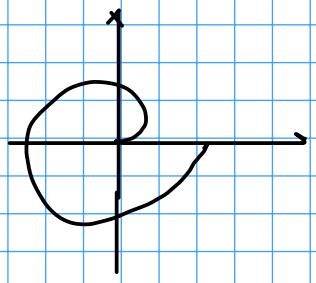
POTREI ANCHE SCRIVERE

$$P_0 = \frac{1}{M(\gamma)} \int_\gamma \sigma(P)\, P \, ds$$

$\| \; (x_0,y_0,z_0)$

Nel caso $\sigma \equiv 1$ P_0 dipende solo dalla curva γ e si chiama "centro geometrico" di γ (o anche "baricentro" di γ)

Ad esempio $\gamma(t) = t(\cos(t), \sin(t))$ (SPIRALE) $0 \le t \le 2\pi$



Cerco il baricentro:

$$\gamma'(t) = (\cos t, \sin t) + t(-\sin t, \cos t)$$

$$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+t^2}$$

(1) $$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\, dt$$. Pongo $t = \sinh(\theta)$

$$1 + t^2 = 1 + \sinh^2(\theta) = \cosh^2(\theta), \quad dt = \cosh(\theta)$$

$$\Rightarrow \ell(\gamma) = \int_0^A \cosh^2(\theta)\, d\theta = \circledast \quad \text{dove } A = \operatorname{arcsinh}(2\pi)$$

$$\left(\cosh(2\theta) = \cosh^2(\theta) + \sinh^2(\theta) = 2\cosh^2(\theta) - 1 \iff \cosh^2(\theta) = \frac{1+\cosh(2\theta)}{2} \right)$$

$$\circledast = \int_0^A \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh(2\theta) \right) d\theta = \frac{A}{2} + \frac{1}{4}\left[\sinh(2\theta)\right]_0^A =$$

$$\frac{\operatorname{arcsinh}(2\pi)}{2} + \frac{1}{4}\sinh(2A) = \frac{\operatorname{arcsinh}(2\pi)}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\sinh(A)}_{2\pi}\underbrace{\cosh(A)}_{\sqrt{1+\sinh^2(A)}=\sqrt{1+4\pi^2}} =$$

$$\frac{\operatorname{arcsinh}(2\pi)}{2} + \frac{1}{2}\, 2\pi\sqrt{1+4\pi^2} =$$

$$\boxed{\frac{\operatorname{arcsinh}(2\pi)}{2} + \pi\sqrt{1+4\pi^2} = \ell(\gamma)}$$

(2) $$\int_\gamma x\, ds = \int_0^{2\pi} t\cos(t)\sqrt{1+t^2}\, dt$$ ↖ non sono calcolabili :(

$$\int_\gamma y\, ds = \int_0^{2\pi} t\sin(t)\sqrt{1+t^2}\, dt$$ ↙

ALTRO MODO DI ARRIVARE ALLA LUNGHEZZA DI UNA CURVA

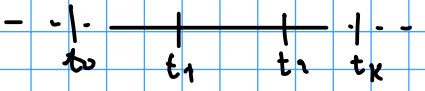
Def. Prendiamo una curva $\gamma: I \to \mathbb{R}^N$ $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

Prendiamo $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ in I e indichiamo

$\sigma = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$. Indichiamo

$$\ell(\gamma,\sigma) = \|\gamma(t_1)-\gamma(t_0)\| + \|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)\| + \dots + \|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\|$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$$



DEFINISCO $\ell_G(\gamma) = \sup_\sigma \ell(\gamma,\sigma)$ (può essere $+\infty$)

Nota Se $I = [a,b]$ posso pensare $t_0 = a$ $t_k = b$

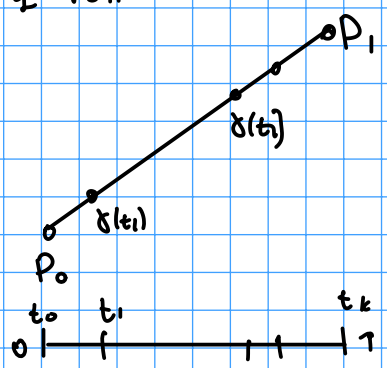
(dato che prendo il sup. "mi conviene" far partire lo spezzato da $\gamma(a)$ e farlo finire a $\gamma(b)$)

PER ESEMPIO $\gamma(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$ $P_0, P_1 \in \mathbb{R}^N$ $0 \le t \le 1$

Allora se $\sigma = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\} \Rightarrow$

$$\ell(\gamma, \sigma) = \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \|P_1 - P_0\| \quad (\text{qualunque } \sigma)$$

i punti sono tra loro allineati



(se si scrive l'espressione sopra si trova l'eguaglianza)

$$\Rightarrow \boxed{\ell_G(\gamma) = \|P_1 - P_0\|}$$

NOTA Data una qualunque $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N \Rightarrow$

$$\ell(\gamma) \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\| = \ell(\sigma, \gamma) \quad \text{dove } \sigma = \{a, b\}$$

(il segmento è una particolare spezzata)

Il segmento tra due punti è la curva di minima lunghezza (geometrica) che congiunge i due punti

FATTI (a) Curve discontinue possono avere lunghezza finita

(b) Curve continue possono avere lunghezza infinita

(c) Se γ è $C^1 \Rightarrow \ell_G(\gamma) = \ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$

Prop. • Se γ_1 è una riparametrizzata di $\gamma \Rightarrow \ell_G(\gamma) = \ell_G(\gamma_1)$

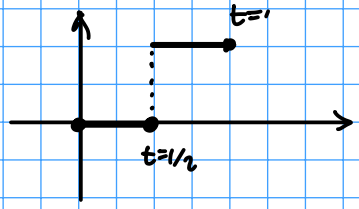
• Se $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow \ell_G(\gamma) = \ell_G(\gamma_1) + \ell_G(\gamma_2)$

$\Rightarrow$ Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, $T \in [a,b]$ e $\gamma_T : [a,T] \to \mathbb{R}^N$ è la restrizione su $[a,T]$ di $\gamma \Rightarrow \ell_G(\gamma_T) \leq \ell_G(\gamma)$

(TUTTE QUESTE PROPRIETÀ SI OTTENGONO ABBASTANZA FACILMENTE DALLA DEFINIZIONE)

VEDIAMO UN ESEMPIO di (a) $\quad t \in [0,1]$

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ (t, 1) & \text{se } t \in]1/2, 1] \end{cases}$$



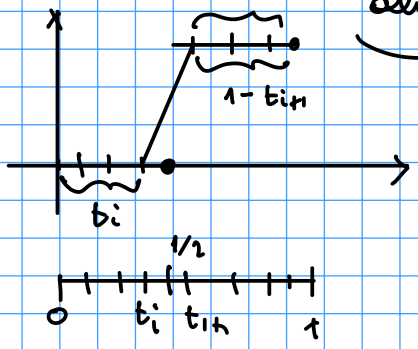
$\ell(\gamma) = 2$ (conta anche la linea tratteggiata)

In effetti prendiamo $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\} = \sigma$

$$t_i \le \frac{1}{2} < t_{i+1}$$

$$\ell(\gamma,\sigma) = \sum_{i=1}^{i} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| + \sum_{i=i+2}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

allineati allineati



$$t_i + \sqrt{1 + (t_{i+1} - t_i)^2} + 1 - t_{i+1}$$

$$\| (1, t_{i+1}) - (0, t_i) \|$$

$$1 + \sqrt{1 + (t_{i+1} - t_i)^2} + - (t_{i+1} - t_i)$$

$$\underbrace{1 + \sqrt{1 + \Delta^2}} - \Delta \qquad \Delta = t_{i+1} - t_i$$

sup $\to 2$ (mandando $\Delta \to 0$)