Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 10 16/10/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

CURVE

ESEMPIO $\gamma(t) = t(\cos(t), \sin(t))$

è una curva regolare (ORA LO DIMOSTRIAMO) (è chiaramente di classe C^∞). La derivata di γ è

$$\gamma'(t) = (\cos(t), \sin(t)) + t(-\sin(t), \cos(t))$$

(sono ortogonali)

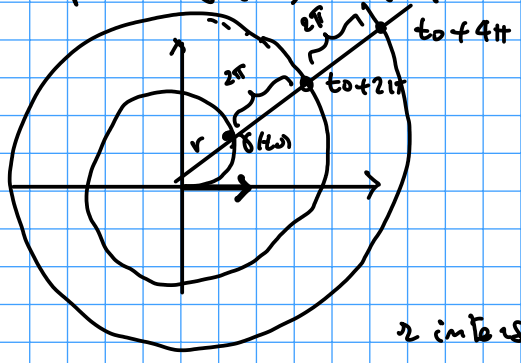
$$(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = 0$$

$$\Rightarrow \|\gamma'(t)\|^2 = \|(\cos t, \sin t)\|^2 + t^2 \|(-\sin(t), \cos(t))\|^2$$

($\|(\cos t, \sin t)\| = 1$, $\|(-\sin(t), \cos(t))\| = 1$)

$$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+t^2} > 0 \quad (\gamma \text{ è regolare})$$

Per esempio $\gamma'(0) = (1, 0)$



← SPIRALE DI ARCHIMEDE

HA PASSO COSTANTE: Se prendo una retta r uscente dall'origine $\Rightarrow$ r interseca la curva in punti equidistanti

IN EFFETTI dato $t_0 > 0 \Rightarrow$ la retta r che passa per $\gamma(t_0)$ interseca γ nei punti $\gamma(t_0 + 2k\pi)$. Allora

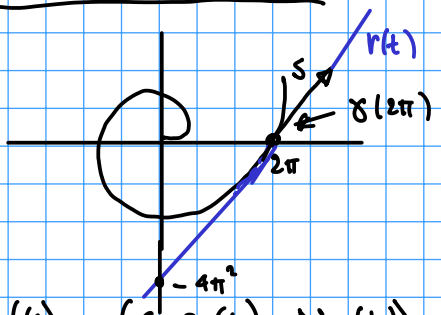
$$\| \gamma(t_0 + 2\pi) - \gamma(t_0) \|$$

$$= \| (t_0 + 2\pi)(\cos(t_0 + 2\pi), \sin(t_0 + 2\pi)) - t_0 (\cos(t_0), \sin(t_0)) =$$

$$\| (t_0 + 2\pi)(\cos(t_0), \sin(t_0)) - t_0 (\cos(t_0), \sin(t_0)) \| =$$

$$\| 2\pi (\cos(t_0), \sin(t_0)) \| = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$$

ALTRA PROPRIETÀ: Prendiamo $t = 2\pi$



$$\gamma(2\pi) = 2\pi (\cos(2\pi), \sin(2\pi)) = (2\pi, 0)$$

$$\gamma'(t) = (\cos(t), \sin(t)) + t(-\sin(t), \cos(t))$$

$$\gamma'(2\pi) = (1, 0) + 2\pi (0, 1) = \underbrace{(1, 2\pi)}_{\gamma'(2\pi)} =: \vec{v}$$

Consideriamo la retta tangente alla curva nel punto $\gamma(2\pi) = (1, 0)$

(IN GENERALE dati $P \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ retta per P con direttrice $\vec{v}$ è la curva $P + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$)

$$\rightarrow \quad r(t) = \gamma(2\pi) + t\,\gamma'(2\pi) = (2\pi, 0) + t(1, 2\pi) =$$

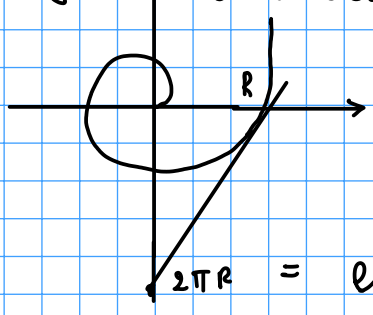
$$\underline{(2\pi + t, \; 2\pi t)}$$

Troviamo l'intersezione di $r(t)$ con l'asse $y \Rightarrow$

$2\pi + t = 0 \iff t = -2\pi$. Allora il punto di intersezione è $r(-2\pi) = (0, -4\pi^2)$ che dista $4\pi^2$ dall'origine:

NOTA che $4\pi^2 = 2\pi \cdot 2\pi = 2\pi \| (2\pi, 0) \|$ = lunghezza della circonferenza di raggio 2π.

Se faccio un'omotetia:



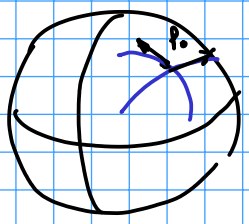
= lunghezza della circonferenza

ARCHIMEDE SCOPRÌ QUESTA PROPRIETÀ

MEDIANTE LE CURVE POSSO DEFINIRE LE DIREZIONI TANGENTI A UN INSIEME

Def. Supponiamo $A \subset \mathbb{R}^N$ $P_0 \in A$.

Dico che un vettore $\vec{v}$ è **tangente** a A nel punto P_0 se esiste una curva di classe C^1 $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to A$ $\varepsilon > 0$, $\gamma(0) = P_0$ $\gamma'(0) = \vec{v}$



oss. (1) $\vec{v} = 0$ è sempre tangente (basta prendere γ costante: $\gamma(t) = P_0$)

(2) Se $\vec{v}$ è tangente ad A in P_0 $\Rightarrow \lambda \vec{v}$ è ancora tangente ad A in P_0 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

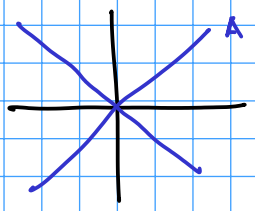
Infatti se $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to A$, $\gamma(0) = P_0$, $\gamma'(0) = \vec{v}$ e se $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \neq 0$ - il caso $\lambda = 0$ è immediato)

Allora $\gamma_1(t) := \gamma(\lambda t)$ è definita in $]-\frac{\varepsilon}{|\lambda|}, \frac{\varepsilon}{|\lambda|}[$

$\gamma_1(0) = P_0$ $\gamma_1'(t) = \lambda \gamma'(\lambda t) \Rightarrow \gamma_1'(0) = \lambda \gamma'(0) = \lambda \vec{v}$

IN GENERALE NON È DETTO CHE $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ tangenti $\Rightarrow$ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ tangente (PER QUESTO CI PIACCIONO DELLE PROPRIETÀ DI 1)

Per esempio $A = \{x^2 = y^2\}$ $P_0 = (0,0)$



$(1,1)$ e $(1,-1)$ sono tangenti

$(2,0)$ NON È TANGENTE

(A "NON È REGOLARE" in $(0,0)$)

DEFINIZIONE (integrale curvilineo di prima specie)

Consideriamo $\gamma : [a,b] \to A \subset \mathbb{R}^M$ curva di classe C^1 e $f : A \to \mathbb{R}$ continua. PONIAMO

$$\int_\gamma f \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt$$

Se $f \equiv 1$ chiamo "lunghezza di γ"

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma 1 \, ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

ESEMPIO P_0 e $P_1 \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma(t) := P_0 + t(P_1 - P_0)$, $t \in [0,1]$.

γ è "il segmento di estremi P_0 e P_1" N.B. $\gamma(0) = P_0$

$\gamma_1 = P_1$. γ è regolare: $\gamma' = P_1 - P_0$ (costante)

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma 1 \, ds = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \|P_1 - P_0\| \, dt = \|P_1 - P_0\|$$

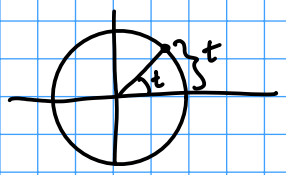
ESEMPIO $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$

$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ $\|\gamma'(t)\| = 1$

$$\Rightarrow \ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$$

NOTA Se chiamo γ_L la restrizione di γ su $[0, L]$

$$\Rightarrow \ell(\gamma_L) = \int_0^L \|\gamma_L'\| \, dt = \int_0^L dt = L$$



LA CURVA γ è "PARAMETRIZZATA CON LA LUNGHEZZA D'ARCO"

TEOREMA Sia γ sia una curva C^1 $\gamma : [a,b] \to A$

$f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che

$\varphi : [c,d] \to [a,b]$ sia biiettivo e C^1. $\gamma_1(s) := \gamma(\varphi(s))$

($\Rightarrow$ φ è strett. monotona, mandi $[c,d]$ in $[a,b]$)

ALLORA

$$\int_{\gamma_1} f \, ds = \int_\gamma f \, ds$$

Dim. Basta scrivere le definizioni (e usare il cambio di var.)

$$\int_{\gamma_1} f \, ds = \int_c^d \|\gamma_1'(s)\| ds = \int_c^d \|\varphi'(s) \gamma'(\varphi(s))\| \, ds =$$

$$\int_c^d \|\gamma'(\varphi(s))\| \, |\varphi'(s)| \, ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_\gamma f \, ds$$

↑ cambio di var. $t = \varphi(s)$

$\#$

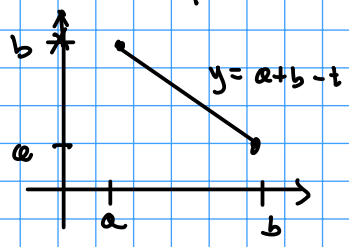
$$\left[\int_c^d g(\varphi(s))\,\varphi'(s)\,ds = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} g(t)\,dt \right] \quad \text{cambio di variabile}$$

IN PARTICOLARE, SE DEFINISCO $\tilde{\gamma}:[a,b] \to A$, COME

$$\tilde{\gamma}(t) := \gamma(a+b-t) = \gamma(\varphi(t)) \text{ dove } \varphi(t) = a+b-t$$

$$\tilde{\gamma}(a) = \gamma(b)$$

$$\tilde{\gamma}(b) = \gamma(a)$$



($\tilde{\gamma}$ è "la curva opposta" a γ) $\Rightarrow$

$$\int_{\tilde{\gamma}} f\,ds = \int_{\gamma} f\,ds$$

NOTA Se $\gamma:[-1,1] \to \mathbb{R}^n$ $\quad \tilde{\gamma}(t) := \gamma(-t)$

ESEMPIO Calcoliamo la lunghezza di un tratto di spirale (archimedea).

$$\gamma(t) = t(\cos(t), \sin(t))$$

$$\gamma'(t) = (\cos(t), \sin(t)) + t(-\sin(t), \cos(t)) \Rightarrow$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = 1 + t^2 \iff \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+t^2}$$

Si prende il tratto di spirale da $t=0$ a $t=T$

$$\Rightarrow \ell(\gamma) = \int_0^T \sqrt{1+t^2}\,dt = \int_0^T \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt =$$

$$\int_0^T \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \int_0^T t \boxed{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}\,dt =$$

(integro per parti nel II integrale: $\frac{d}{dt}\sqrt{1+t^2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$)

$$\left[\operatorname{arcsinh}\right]_0^T + \left[t\sqrt{1+t^2}\right]_0^T -$$

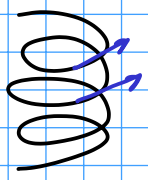
$$- \int_0^T 1 \cdot \sqrt{1+t^2}\,dt \quad \left(\Rightarrow 2\int_0^T \sqrt{1+t^2} = \operatorname{arcsinh}(T) + T\sqrt{1+T^2}\right.$$

↑ LO PORTO A SX

$$\ell(\gamma_T) = \int_0^T \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{\operatorname{arcsinh}(T) + T\sqrt{1+T^2}}{2}$$

ESEMPIO (lunghezza dell'elica) $R, c > 0$

$$\gamma(t) = \underbrace{(R\cos(t), R\sin(t), ct)}_{\in \mathbb{R}^3} \qquad 0 \le t \le T$$



$$\gamma'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t), c)$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t) + c^2$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2 + c^2}$$

$$\ell(\gamma) = \int_0^T \sqrt{R^2+c^2}\, dt = T\sqrt{R^2+c^2}$$

Def. (incollamento di curve) Siano

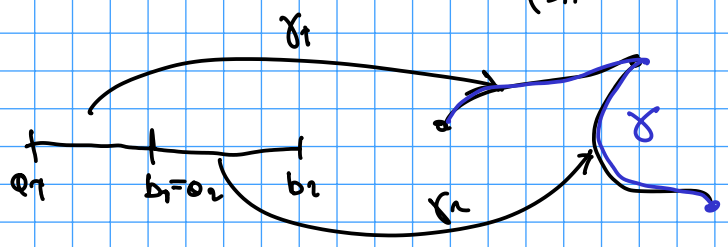
$\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$ due curve.

Dico che γ_1 e γ_2 sono "consecutive" se $b_1 = a_2$ e

$$\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$$

Pongo $\gamma_1 \vee \gamma_2$ la curva $\gamma : [a_1, b_2]$ definita ponendo

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } a_1 \le t \le b_1 \ (= a_2) \\ \gamma_2(t) & \text{se } a_2 \le t \le b_2 \end{cases}$$



NOTA NON È COSÌ IMPORTANTE AVERE $b_1 = a_2$

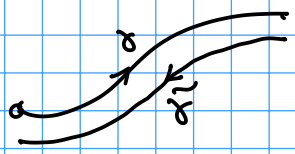
POSSO SEMPRE TRANSLARE $[a_2, b_2]$ in modo da avere questa proprietà → non ho più γ_2 ma una sua riparametrizzata che però ho "tutte le proprietà di quella originale"

DUNQUE γ_1 e γ_2 consecutive $\longleftrightarrow$ $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$

se ho questa proprietà definisco l'incollamento $\gamma_1 \vee \gamma_2$ (su un opportuno intervallo)

NOTA Dato $\gamma \Rightarrow \tilde{\gamma}$ è consecutiva a γ e

$\gamma \vee \tilde{\gamma}$ è una curva chiusa



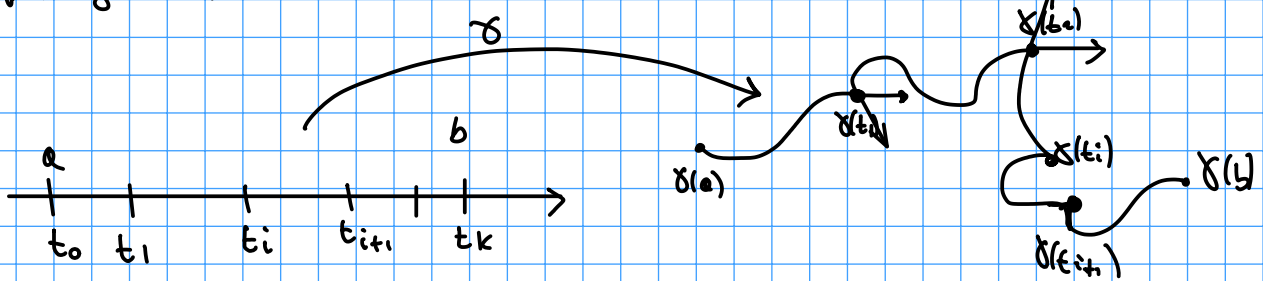
PROPRIETÀ degli integrali sulle curve (I°TIPO)

(a) $\int_{\gamma} (\lambda f + \mu g)\, ds = \lambda \int_{\gamma} f\, ds + \mu \int_{\gamma} g\, ds$

(b) $\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f\, ds = \int_{\gamma_1} f\, ds + \int_{\gamma_2} f\, ds$

(c) $\int_{\tilde{\gamma}} f\, ds = \int_{\gamma} f\, ds$

Def. (C^1 a tratti) Dico che $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è C^1 a tratti (C^k a tratti) se ci sono $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ ($t_0 = a$, $t_k = b$) tali che γ è $C^0([a,b])$ e γ è $C^1([t_i, t_{i+1}])$ per ogni $i = 0 \dots k-1$



($\Rightarrow$ esistono $\gamma'(t_i^+)$ e $\gamma'(t_i^-)$)

$\gamma'(t_i^+) = \lim_{t \to t_i^+} \gamma'(t)$ $\quad$ $\gamma'(t_i^-) = \lim_{t \to t_i^-} \gamma'(t)$

DI FATTO POTREI DEFINIRE γ C^1 a tratti dicendo $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_k$ dove le γ_i sono curve C^1 consecutive

Def. In generale se γ è C^1 a tratti definisco l'integrale di una funzione f su γ ponendo

$$\int_\gamma f\,ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} f\,ds$$

dove $\gamma = \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_k$ come detto sopra

CON QUESTA DEFINIZIONE VALGONO ANCORA LE PROPRIETÀ SCRITTE SOPRA