Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

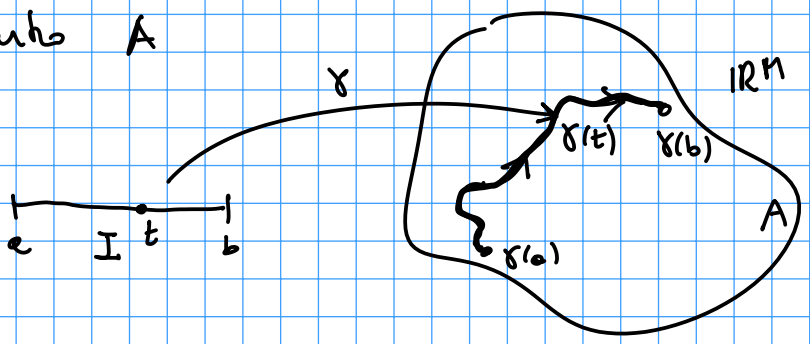
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 09 11/10/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

CURVE Chiamo curva in $A \subset \mathbb{R}^M$ una funzione $\gamma : I \to A$ dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$ - di solito $I = [a, b]$.

L'idea è che, al variare di $t \in I$ $\gamma(t)$ descrive "un cammino" dentro A



Chiamo **SOSTEGNO** di γ l'insieme $\gamma(I) = \{\gamma(t) : t \in I\}$

Se $I = [a, b]$ chiamo **ESTREMI** di γ i due punti $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ ($\gamma(a)$ è "PRIMO" estremo $\gamma(b)$ è il "SECONDO" estremo (ci è un "VERSO" nella curva)

Dico che $\gamma : [a, b] \to A \subset \mathbb{R}^M$ è **CHIUSA** se $\gamma(b) = \gamma(a)$

PER ESEMPIO $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

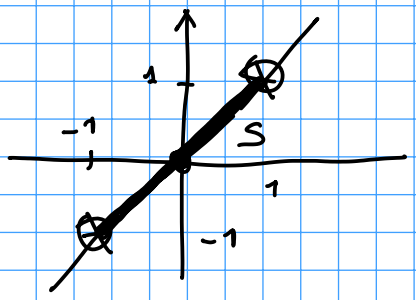
$$\gamma(t) = (\sin(t), \sin(t)) = \sin(t)\,(1,1)$$

Il sostegno di γ è l'insieme $\{t(1,1) : -1 \le t \le 1\} = S$

γ è una curva chiusa

il primo estremo è $(0,0)$

= secondo estremo.



Posso invece considerare $\gamma_1(t) : t(-1,-1) + (1-t)(1,1)$

$= (1,1) + t(-2,-2) = \boxed{(1-2t, 1-2t)}$ PER $t \in [0,1]$

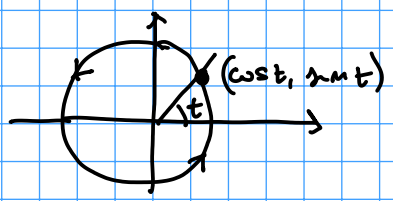
Noto che in questo caso $\gamma(0) = (1,1)$ $\gamma(1) = (-1,-1)$

e il suo sostegno è lo stesso della curva precedente,

ALTRO ESEMPIO $\gamma(t) = R(\cos(t), \sin(t))$ $0 \le t \le 2\pi$

rappresenta la circonferenza di raggio R, centrata nell'origine,

"percorso in verso antiorario"



$\gamma_1(t) = \gamma(-t) = R(\cos(t), -\sin(t))$ percorre la stessa circonferenza in "verso orario"

ENTRAMBE SONO CURVE CHIUSE.

Se invece $\gamma_2(t) = R(\cos(t), \sin(t))$ $0 \le t \le 4\pi$

è una curva che sempre come sostegno la circonferenza, sempre "verso antiorario", MA "FA DUE GIRI" $\gamma_2 \neq \gamma$.

Data una curva γ la posso scrivere $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$

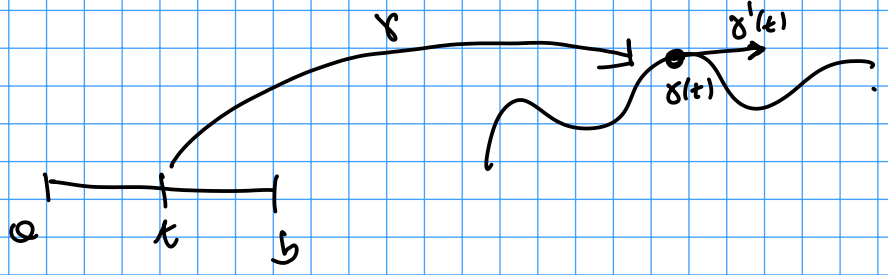
dove ognuna delle γ_i (COMPONENTI DI γ) è una funzione dell'intervallo I a valori reali.

POSSO DIRE γ CONTINUA / DERIVABILE / K-DERIVABILE

se ogni γ_i è CONT / DER. / K-DER.

Indico con $\gamma' = (\gamma_1', \dots, \gamma_m')$ la DERIVATA DI γ

IL VETTORE $\gamma'(t)$ rappresenta una "direzione tangente" a $\gamma(I)$ nel punto $\gamma(t)$.



$\gamma'(t_0)$ è la "velocità" del punto $\gamma(t)$ in $t = t_0$

SONO VALIDE LE SOLITE PROPRIETÀ DELLA DERIVATA

- $(\gamma_1 + \gamma_2)' = \gamma_1' + \gamma_2'$
- $(f \cdot \gamma)' = f'\gamma + f\gamma'$ $\quad (f : I \to \mathbb{R} \mid \gamma : I \to \mathbb{R}^m$
- $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)' = \gamma_1 \cdot \gamma_2' + \gamma_1' \cdot \gamma_2$ $\quad$ (PROD. SCALARE)

NOTA Dall'ultima proprietà si ricava che: dato $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ derivabile

se $\varphi(t) := \|\gamma(t)\|^2 = \gamma(t) \cdot \gamma(t) \Rightarrow$

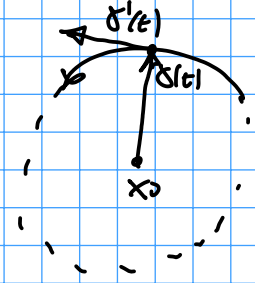
$\varphi'(t) = \gamma(t) \cdot \gamma'(t) + \gamma'(t) \cdot \gamma(t) = 2\gamma(t) \cdot \gamma'(t)$

DUNQUE SE $\|\gamma(t)\| =$ costante $\Rightarrow \gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$

PIÙ IN GENERALE x_0

$\varphi(t) = \|\gamma(t) - x_0\|^2 \Rightarrow \varphi'(t) = 2(\gamma(t) - x_0) \cdot \gamma'(t)$

DUNQUE SE $\|\gamma(t) - x_0\|$ è costante $\Rightarrow \gamma' \perp \gamma(t) - x_0$



$k \geq 0$ $k \in \mathbb{N}$

DEF. Dico che γ è di classe C^k su I se $\exists\, \gamma'(t)$ per tutti i punti $t \in \overset{\circ}{I}$ e $\gamma'(t)$ si estende a una funzione continua su I. Se $k=0$ intendo semplicemente che γ è continua su I.
Dico che γ è C^∞ se è C^k $\forall k$.

DUNQUE dire che $\gamma \in C^1([0,b])$ significa che $\exists\, \gamma'(t)$ per $t \in]a,b[$, che γ' è continua su $]a,b[$ e che esistono finiti

$$\lim_{t \to a^+} \gamma'(t) \qquad \lim_{t \to b^-} \gamma'(t)$$

DEF. Dico che γ è **REGOLARE** su I se γ è $C^1(I)$ e

$$\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

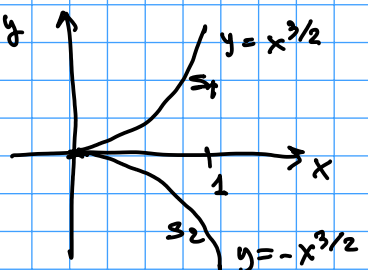
Per esempio prendiamo $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ $t \in [-1,1]$

È CHIARO CHE $t \to t^2$, $t \to t^3$ sono funzioni $C^\infty \Rightarrow$ γ è $C^\infty([-1,1])$. PROVIAMO A DISEGNARE IL SOSTEGNO DI γ.

$$S = \{(t^2,t^3) : -1 \leq t \leq 1\} = S_1 \cup S_2 \text{ dove}$$

$$S_1 = \{(t^2,t^3) \quad 0 \leq t \leq 1\} \qquad S_2 = \{(t^2,t^3) \quad -1 \leq t \leq 0\}$$

$S_1 = \{(x, x^{3/2}) : 0 \leq x \leq 1\}$ (pongo $x = t^2$)



$S_2 = \{(x, -x^{3/2}) : 0 \leq x \leq 1\}$ pongo $x = t^2$ $(-1 \leq t \leq 0)$

SI VEDE CHE S ha "una cuspide" in $(0,0)$

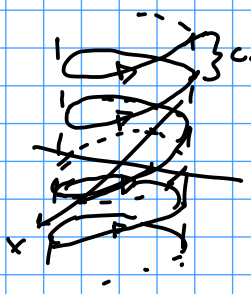
IL PROBLEMA È CHE $\gamma'(0) = (0,0)$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE S **NON** PUÒ ESSERE SOSTEGNO DI UNA CURVA REGOLARE (cioè con derivata $\neq (0,0)$)

ESEMPIO (ELICA) $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$\gamma(t) := (R\cos(t), R\sin(t), ct) \qquad (R>0,\ c>0)$$

Al variare di t la proiezione di $\gamma(t)$ sul piano (x,y) percorre la circonferenza di raggio R. Contemporaneamente la componente sull'asse z si muove con velocità costante $=c$



("percorsi a una molla")

NOTA In generale **NON VALE** IL TEOR. DI LAGRANGE se $M>1$

Lagrange $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile in $]a,b[$ continua in $[a,b] \Rightarrow$

$\exists\ \xi \in]a,b[$ t.c. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

IN PIÙ VARIABILI (IN ARRIVO) l'equivalente sarebbe

data $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^M$ derivabile ... ...

$\Rightarrow \exists\ \xi \in]a,b[:\ \dfrac{\gamma(b)-\gamma(a)}{b-a} = \gamma'(\xi)$ (VETTORI!!)

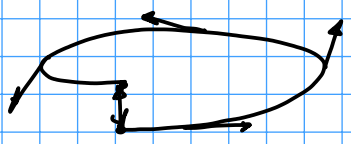
FALSO Basta considerare l'elica ho $a=0$, $b=2\pi$

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

$$\frac{\gamma(2\pi)-\gamma(0)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\big((1,0,2\pi)-(1,0,0)\big) = (0,0,1)$$

PERÒ IN TUTTI I PUNTI $t\in[0,2\pi]$

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$$



se fosse

$\gamma'(\xi) = (0,0,1) \Rightarrow$

$\sin(\xi)=0$, $\cos(\xi)=0$ IMPOSSIBILE

CIÒ NONOSTANTE vale il seguente fatto.

Se γ è $C^1([a,b])$ $\Rightarrow$ $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$

$$\|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\| \leq \left(\max_{a \leq t \leq b} \|\gamma'(t)\| \right) |t_2 - t_1|$$

Dim. Prendiamo $t_1 \in [a,b]$ e consideriamo la funzione

$$\varphi(t) = \|\gamma(t) - \gamma(t_1)\| = \sqrt{\|\gamma(t) - \gamma(t_1)\|^2}$$

Si ha che $\exists\, \varphi'(t)$ se $t \neq t_1$ e

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{\|\gamma(t) - \gamma(t_1)\|^2}} \cdot 2 (\gamma(t) - \gamma(t_1)) \cdot \gamma'(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

(teorema di derivazione della radice e della $\|\cdot\|^2$)

Se applico Lagrange a $\varphi(t)$ $\Rightarrow$

$$\left| \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1} \right| = |\varphi'(\xi)| \qquad \xi \text{ tra } t_1 \text{ e } t_2$$

$$\frac{\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\|}{|t_2 - t_1|} = \left| \frac{\gamma(\xi) - \gamma(t_1)}{\|\gamma(\xi) - \gamma(t_1)\|} \cdot \gamma'(\xi) \right| \leq \text{(Schwarz)}$$

$$\left\| \frac{\gamma(\xi) - \gamma(t_1)}{\|\gamma(\xi) - \gamma(t_1)\|} \right\| \cdot \|\gamma'(\xi)\| = \|\gamma'(\xi)\| \leq \max_{a \leq t \leq b} \|\gamma'(t)\|$$

$$\left\| \frac{\gamma(\xi) - \gamma(t_1)}{\|\gamma(\xi) - \gamma(t_1)\|} \right\| = 1$$

$$\Rightarrow \|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\| \leq \left(\max_{a \leq t \leq b} \|\gamma'(t)\| \right) |t_2 - t_1|$$

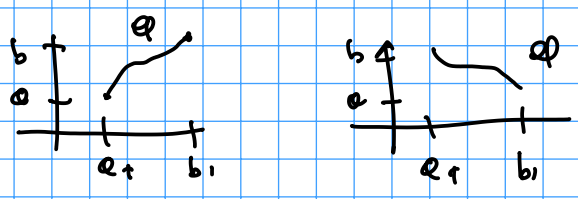
DEF. (RIPARAMETRIZZAZIONE)

Dato un curvo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e un'altro curvo $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$

dico che γ_1 è una "RIPARAMETRIZZATA" di γ

(o che si ottiene da γ mediante un "CAMBIO DI PARAMETRO")

se esiste una funzione $\varphi : [a_1, b_1] \to [a, b]$ CONTINUA e BIGETTIVA ($\Rightarrow \varphi$ è strettamente monotona)



(UNA DELLE DUE ...)

tale che $\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s))$. DICO CHE $t = \varphi(s)$ (σ φ) è il "CAMBIO DI PARAMETRO" che fa passare da γ a γ_1.

Per esempio, se $\omega > 0$, $\gamma_\omega(s) := (\cos(\omega s), \sin(\omega s))$

$$s \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$$

sono tutte riparametrizzate da $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$

Basta prendere $t = \omega s$ come cambio di parametro.

NOTA γ e γ_1 hanno lo stesso sostegno

NOTA Se φ è C^1 e γ è C^1, $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi \Rightarrow$

$$\gamma_1'(s) = \varphi'(s)\, \gamma' \circ \varphi(s)$$

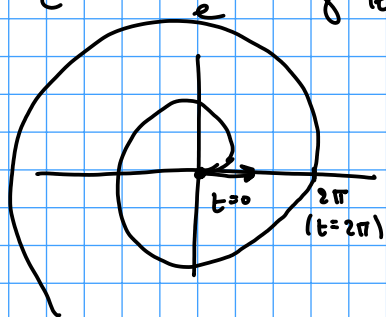
γ_1' è un multiplo di γ' (INDIVIDUANO LA STESSA RETTA - SE SONO $\neq 0$ -)

IL MODULO . $\|\gamma_1'\| \neq \|\gamma'\|$ (dipende da φ')

ALTRO ESEMPIO $\gamma(t) = t(\cos(t), \sin(t))$ $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

γ è C^∞ e $\gamma'(t) = (\cos(t), \sin(t)) + t(-\sin(t), \cos(t))$

$\gamma'(0) = (1, 0)$



(SPIRALE DI ARCHIMEDE)