Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 08 10/10/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Frontiere di insiemi

Abbiamo detto che se $E = \{ g(x) \leq c \}$ non è detto che

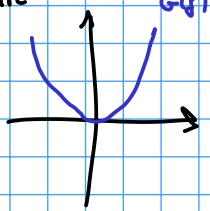
$$\partial E = \{ g(x) = c \} \quad (\partial E \subset \{ g(x) = c \})$$

PIÙ SEMPLICE È IL CASO IN CUI E è un "sottografico" o "epigrafico" di una funzione f.

Def. Data una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ chiamo "grafico" di f

$$G(f) := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^{N+1}, x \in A, y \in \mathbb{R}, \ y = f(x) \} \subset \mathbb{R}^{N+1}$$

$$epi(f) := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^{N+1}, x \in A, y \in \mathbb{R} \ \ y \leq f(x) \} \subset \mathbb{R}^{N+1}$$

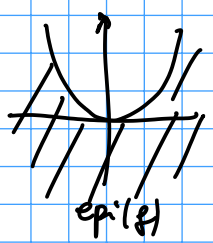


Per esempio il grafico di $y = x^2$ è la parabola

Fatto $A = \mathbb{R}^N$ f continua da $A \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$epi(f)$ e $G(f)$ sono chiusi, $\partial epi(f) = G(f)$

INOLTRE $\{ (x,y) : y < f(x) \}$ è aperto e la sua frontiera è sempre $G(f)$

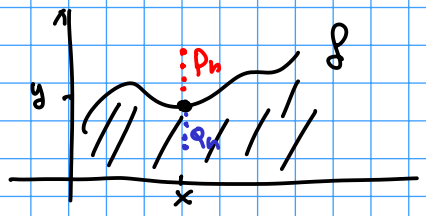


Dim. INTANTO $\underbrace{\partial epi(f) \subset G(f)}_{(*)}$ dato che posso prendere

$g(x,y) = y - f(x)$ CONTINUA su $\mathbb{R}^{N+1}$ e

$epi(f) = \{g \leq 0\}$ $\quad G(f) = \{g = 0\}$. Se applico è quanto visto ieri alla funzione g trovo l'inclusione (*)

Vale anche $G(f) \subset \partial\, epi(f)$



Se prendo $(x, y+1/n) = P_n \notin epi(f)$ e $P_n \to (x,y)$

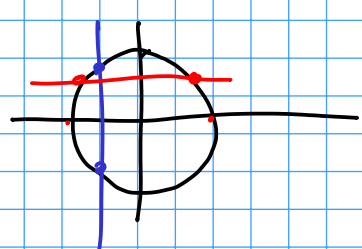
$(x, y-1/n) = Q_n \in \{y < f(x)\} \subset epi(f)$, $Q_n \to (x,y)$

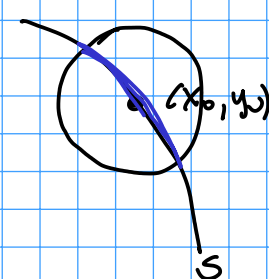
Dunque $(x,y) \in G(f) \Rightarrow (x,y) \in \partial\, epi(f)$

$(x,y) \in \partial\{y < f(x)\}$

I grafici dunque sono "insiemi buoni" a cui cercheremo spesso di ricondurci. Per es. la circonferenza

$S = \{x^2 + y^2 = 1\}$ NON È UN GRAFICO

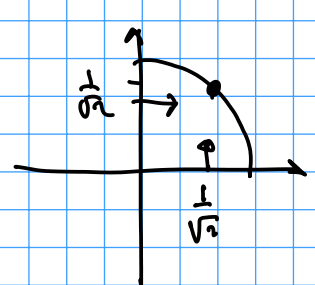




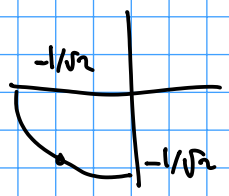
Però per ogni punto $(x_0,y_0) \in S$, se mi metto VICINO A (x_0,y_0), cioè considero $S \cap B((x_0,y_0), r)$ ← questo insieme è grafico di una $y = f(x)$ o di una $x = g(y)$

$$y = f(x) = \pm\sqrt{1-x^2} \qquad x = g(y) = \pm\sqrt{1-y^2}$$

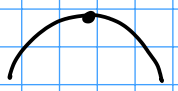
a seconda del segno di y_0 $\qquad$ a seconda del segno di x_0



VICINO A $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ S si descrive sia come grafico di $y = \sqrt{1-x^2}$ che come grafico di $x = \sqrt{1-y^2}$



vicino a $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ S si descrive come grafico di $y = -\sqrt{1-x^2}$ o come grafico di $x = -\sqrt{1-y^2}$



Vicino a $(0,1)$ S si descrive come grafico di $y = \sqrt{1-x^2}$ (non come grafico $x = f(y)$)

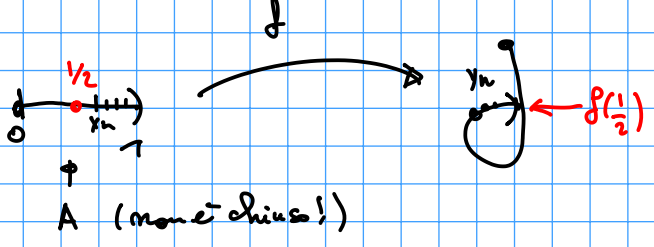
IN 1 variabile vale il teorema

Teorema $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva $\Rightarrow$ $f([a,b]) = [c,d]$ e $f^{-1}:[c,d] \to [a,b]$ è continua

NELLA DIM. CONTA LA STRUTTURA DI $\mathbb{R}$

Non è facile trovare criteri per cui una funzione continua in più variabili, che sia iniettiva, abbia inversa continua

ESEMPIO $f : [0,1[\to \mathbb{R}^2$



f è iniettiva e $f([0,1[)$ è l'insieme disegnato e dello

f è continua però f^{-1} NON È CONTINUA. Se prendo $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ $\quad y_n = f(x_n) \to f(1/2)$

SE f^{-1} fosse continua $\Rightarrow$ $f^{-1}(y_n) = x_n \to f^{-1}f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

MA $x_n \to 1 \neq \frac{1}{2}$

UNA COSA CHE SI PUÒ DIMOSTRARE È

Teorema Se $A \subset \mathbb{R}^N$ è limitato e chiuso e se $f: A \to \mathbb{R}^M$ è continua e iniettiva, allora, però

$B = f(A)$ (B è limitato e chiuso e) $f^{-1}: B \to A$ è continua. (NO DIM.)

VEDIAMO UN ESEMPIO IN CUI SI CERCA f^{-1} per una funzione di 2 variabili:

Considero $f(x,y) = (x+y,\ xy)$ $\left(f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\right)$

<u>f è continua</u> se $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \iff x_n \to x_0,\ y_n \to y_0$

$\Rightarrow$ $x_n + y_n \to x_0 + y_0$ (la prima componente è continua)

$x_n \cdot y_n \to x_0 \cdot y_0$ (la seconda componente è continua)

MI CHIEDO (1) chi è $B := f(\mathbb{R}^2)$

(2) se f è iniettiva - in caso affermativo $\Rightarrow$ $f^{-1}: B \to \mathbb{R}^2$ è continua.

(1) Dato un punto $(t, w) \in \mathbb{R}^2$ mi chiedo se $\exists (x,y)$ tale che $f(x,y) = (t,w)$ (e se se ce n'è uno solo)

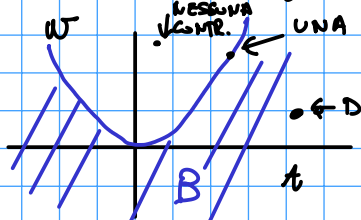
DEVO RISOLVERE

$$\begin{cases} x+y = t \\ xy = w \end{cases} \iff \begin{cases} y = t-x \\ x(t-x) = w \end{cases} \iff \begin{cases} y = t-x \\ x^2 - tx + w = 0 \end{cases}$$

Se guardo l'equazione $x^2 - tx + w = 0$ vedo che

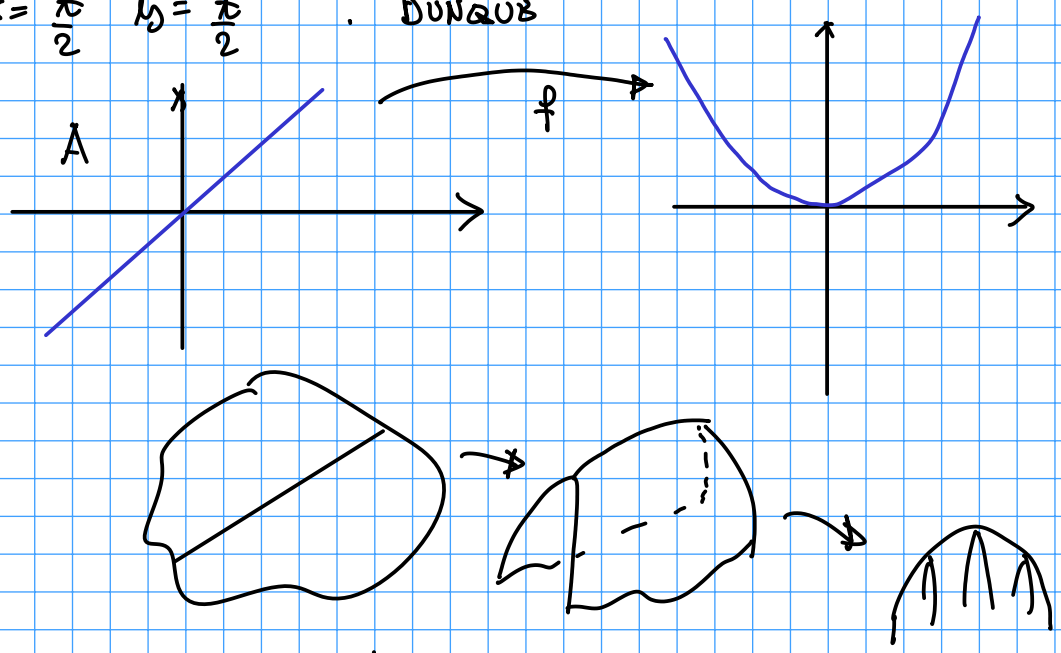
- $\exists$ sol. $\iff$ $t^2 - 4w \geq 0 \iff w \leq t^2/4$
- Se $w \leq t^2/4$ le sol sono $x_{1,2} = \dfrac{t \pm \sqrt{t^2-4w}}{2}$ (sono due quando $w < t^2/4$)

DUNQUE IN $\mathbb{R}^2$ HO L'INSIEME $B = \{ w \leq t^2/4 \}$ che è proprio $f(\mathbb{R}^2)$



Se prendo $(t,w) \in \partial B = \{ t^2 = 4w \} \Rightarrow$

$x = \frac{t}{2}$ $y = \frac{t}{2}$. DUNQUE



QUINDI f NON E' INIETTIVA.

SE PERÒ CONSIDERO $A = \{(x,y) : y \geq x\}$

si vede che la restrizione $f|_A$ è iniettiva e $(f|_A)^{-1}$ è continua (quando risolvo l'equazione di 2° grado e impongo $y \geq 0 \rightarrow$ trovo una scelta univoca tra i + e i -)