Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 07 09/10/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

CONTINUITÀ

Def. Dati $A \subset \mathbb{R}^N$ $x_0 \in A$ $f : A \to \mathbb{R}^M$ dico che f è continua in x_0 se

(a) x_0 è isolato in A

(b) x_0 è di accumulazione per A e vale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Fatto (caratterizzazione per successioni)

f continua in $x_0 \iff$ per ogni successione (x_n) in A tale che $x_n \to x_0$ si ha $f(x_n) \to f(x_0)$

Dico che f è continua in A se f è continua in ogni $x_0 \in A$.

Proprietà . $A \subset \mathbb{R}^N$ $x_0 \in A$ $f, g : A \to \mathbb{R}^N$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(a) f, g continue in $x_0 \Rightarrow \lambda f + \mu g$ continua in x_0

(b) $g : A \to \mathbb{R}$, f, g continue in $x_0 \Rightarrow gf$ è continua in x_0 ($g \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^M$) (PRODOTTO)

(b') f, g continue in $x_0 \Rightarrow f \cdot g$ continua in x_0

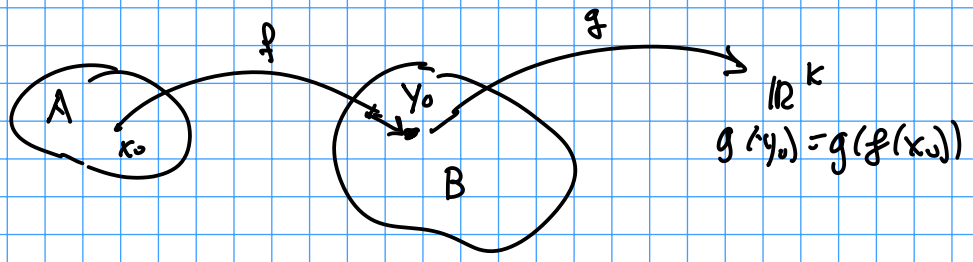
↑ PROD. SCALARE

(c) $f: A \to B \qquad g: B \to \mathbb{R}^k \qquad A \subset \mathbb{R}^N \quad B \subseteq \mathbb{R}^M$

$x_0 \in A \qquad y_0 = f(x_0) \in B$

f continua in x_0, g continua in y_0

$\Rightarrow g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ è continua in x_0



(d) Le "proiezioni" $\pi_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ def. da

$\pi_i(x) = x_i \qquad (x = (x_1, \dots, x_N))$

sono continue $\quad (|x_i - y_i| \le \|x - y\|)$

$$\left(\text{cioè } \lim_{(x_1 \dots x_N) \to (x_1^0 \dots x_N)^0} x_i = x_i^0 \right)$$

da cui segue che

$f: A \to \mathbb{R}^M$ è continua in $x_0 \in A$

$\Updownarrow$

$f_i : A \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in A \quad \forall i = 1 \dots M$

dove $f = (f_1, \dots, f_M)$, f_i = componenti di f.

Prendiamo $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua e definiamo gli insiemi seguenti: $(c \in \mathbb{R})$

$E := \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \le c\}$, $\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) < c\} =: G$

$F := \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) = c\}$

E e G sono i "sottolivelli" di f rispetto a c

F = "insieme di livello c" per f.

FATTI E, F sono chiusi, G è aperto

Dim. Uso la caratterizzazioni dei chiusi mediante successioni: A è chiuso $\Leftrightarrow$ $\forall (a_n)$ in A con $a_n \to x$ si ha $x \in A$

- Vediamo che E è chiuso: se (x_n) in E $\Leftrightarrow$ $f(x_n) \le c$. se $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ (f continua) $\Rightarrow f(x) \le c$. DUNQUE $x \in E$ (E è chiuso)

- Stesso discorso per F: se $x_n \in F$, $x_n \to X \Rightarrow$ $f(x_n) = c \Rightarrow f(x_n) \to f(x) \Rightarrow f(x) = c \Rightarrow x \in F$.

- G è aperto $\Leftrightarrow$ $\complement G$ è chiuso cioè $\{x : f(x) \ge c\}$ chiuso. Basta applicare quanto sopra a $-f$ $\quad \{x : -f(x) \le -c\}$

FATTO $\partial E \subset F$, $\partial G \subset F$ (può non valere "$=$")

$$\partial\{x : f(x) \le c\} \subset \{x : f(x) = c\}$$

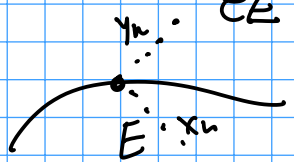
cioè

$$\partial\{x : f(x) < c\} \subset \{x : f(x) = c\}$$

Dim. Cosa vuol dire $x \in \partial E$?! $\leftrightarrow$

$\exists (x_n)$ in E tale che $x_n \to x$

$\exists (y_n)$ in $\complement E$ tale che $y_n \to x$



Se $E\{f(x) \le c\}$ e se $x \in \partial E$ trovo che

$\exists (x_n)$ con $f(x_n) \le c$ e $x_n \to x \Rightarrow f(x) \le c$ $(f(x_n) \to f(x))$

$\exists (y_n)$ con $f(y_n) > c$ e $y_n \to x \Rightarrow f(x) \ge c$ $(f(y_n) \to f(x))$

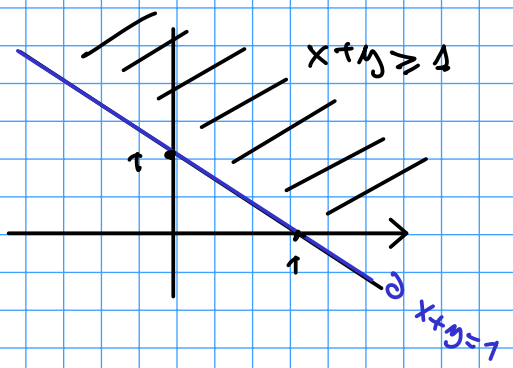
$\Rightarrow f(x) = c$

Ho DIMOSTRATO che $\partial\{f(x) \le c\} \subset \{f(x) = c\}$

Nello stesso modo dimostro $\partial\{f(x) < c\} \subset \{f(x) = c\}$

Per esempio $\partial\{x+y \le 1\} \subset \{x+y=1\}$

$\partial\{x+y<1\} \subset \{x+y=1\}$

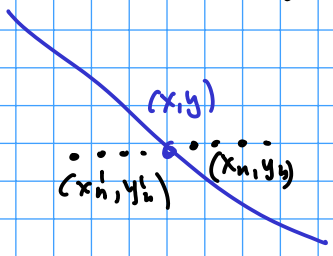


IN QUESTO CASO VALE "$=$"

Per dimostrare che in questo caso $\partial\{x+y \le 1\} = \partial\{x+y<1\} = \{x+y=1\}$, basta vedere che ogni punto (x,y) con $x+y=1$ è limite di punti (x_n, y_n) con $x_n+y_n>1$ e punti (x'_n, y'_n) con $x'_n+y'_n<1$

BASTA PRENDERE $(x_n, y_n) = (x+1/n, y)$

$(x'_n, y'_n) = (x-1/n, y)$



- VEDIAMO CHE IN GENERALE NON VALGONO

(a) $\partial\{g(x) \le c\} = \{g(x)=c\}$

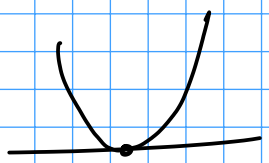
(b) $\partial\{g(x)<c\} = \{g(x)=c\}$

Vediamo che (b) può essere falsa: prendo

$g(x,y) = x^2+y^2 \qquad c=0$

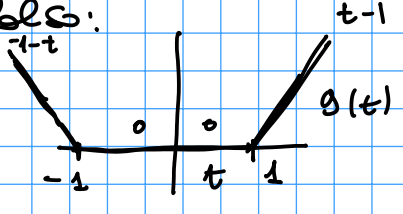
$\{(x,y) : x^2+y^2<0\} = \phi \qquad \partial\phi = \phi$

MA $\{(x,y) : x^2+y^2=0\} = \{(0,0)\} \neq \phi$



Vediamo che anche (a) può essere falsa:

PRENDIAMO $g(t)$ fatta così:



$$g(x,y) = g(x^2+y^2) \quad \begin{pmatrix} \neq 0 & \text{se } x^2+y^2 > 1 \\ = 0 & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \end{pmatrix}$$

Se $E = \{(x,y) : g(x,y) \leq 0\} = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

$\Rightarrow \partial E = \{x^2+y^2 = 1\}$ ma $\{g(x,y)=0\} = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

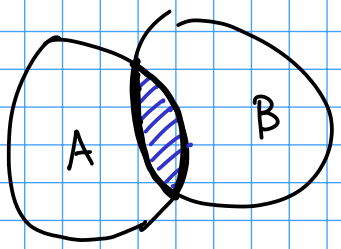
$\subset$ (non $=$)

IL DIFETTO È CHE LA $g(x,y)$ "è fatta male"

(lo capiremo in termini dei "punti critici di g")

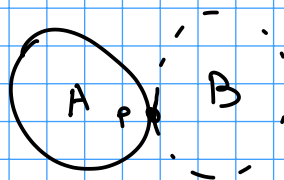
TORNIAMO UN MOMENTO ALLA FORMULA

$$\partial(A \cap B) = (\partial A) \cap B \cup A \cap (\partial B)$$



VERA SE A e B sono <u>chiusi</u>

Se non sono chiusi può andare male:



$A \cap B = \phi$

$\partial A \cap B = \phi$

MA $\partial B \cap A = \{p\} \neq \phi$

IN GENERALE VALE

$$\partial A \cap B = (\partial A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \partial B) \quad \text{se } \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cap B}$$

(sempre vero se A e B sono chiusi)

PROPRIETÀ "GLOBALI" delle funzioni continue:

(1) TEOREMA DI WEIERSTRASS

(2) UN TEOREMA SULLA CONTINUITÀ DI g^{-1}

(3) ?? Teorema degli zeri ??

Teorema di Weierstrass. Se $f: A \to \mathbb{R}$ continua

dove $A \subset \mathbb{R}^N$ **A CHIUSO e LIMITATO**

Allora f ha massimo e minimo su A:

$\exists\, x_m, x_M \in A$ tali che $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)\ \forall x \in A$

(x_m / x_M si dicono "PUNTI DI MIN / MAX" per f

$f(x_m) / f(x_M)$ "VALORE MAX / MIN" di f

PER DIMOSTRARLO PREMETTIAMO UN "Lemma"

Prop. Se (x_n) è una successione limitata in $\mathbb{R}^N$

allora $\exists\, (x_{n_k})$ (successione estratta da (x_n)) ed

esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x_{n_k} \to x$

Dim. La do per buona nel caso $N=1$ (FATTO CHIAVE!)

Nel caso generale ho $(\mathbf{x}_n)$ in $\mathbb{R}^N$ limitata.

$\mathbf{x}_n = (x_{1,n}, \dots, x_{N,n})$ ($x_{i,N}$ COORDINATE DI $\mathbf{x}_n$)

Se $(\mathbf{x}_n)$ è limitata (in $\mathbb{R}^N$) $\Rightarrow$ ognuna delle $(x_{i,n})$ è

limitata in $\mathbb{R}$. Allora da

$(x_{1,n})$ estraggo (x_{1,n_k}) che converge a $x_1 \in \mathbb{R}$

Vado a vedere (x_{2,n_k}), è anche lei limitata $\Rightarrow$

trovo $(x_{2,n_{k_n}})$ che converge a un $x_2 \in \mathbb{R}$

⋮ ITERO N VOLTE

ALLA FINE TROVO UNA SELEZIONE DI INDICI (n_k)

tale che

$$x_{1,n_k} \to x_1 \quad x_{2,n_k} \to x_2 \quad \cdots \quad x_{N,n_k} \to x_N$$

e cioè $\mathbf{x}_{n_k} \to \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ FINE

FATTO Se A è chiuso e limitato e se $f: A \to \mathbb{R}^M$ è continuo $\Rightarrow$ $f(A)$ è chiuso e limitato

(non sarebbe vero A chiuso $\Rightarrow f(A)$ chiuso e neppure A limitato $\Rightarrow f(A)$ limitato)

Dim. (1) dimostro che $f(A)$ è chiuso. Per successioni: faccio vedere che, $y_n \in f(A)$, $y_n \to y \Rightarrow y \in f(A)$

INFATTI $y_n \in f(A)$ significa che $\exists\, x_n \in A$ per cui $f(x_n) = y_n$

MA A è limitato $\Rightarrow$ trovo un'estratta (x_{n_k}) tale che $x_{n_k} \xrightarrow{\mathbb{R}^N} x$. Dato che A è chiuso $x \in A$.

Dato che f è continuo $f(x_{n_k}) \to f(x)$

MA $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ è estratta da (y_n); dato che $y_n \to y$

$\Rightarrow$ $\boxed{y = f(x)}$. DUNQUE $y \in f(A)$

(2) $f(A)$ è limitato. Se non è limitato trovo una succ. $(y_n) : n f(A)$ con $\|y_n\|_{\mathbb{R}^M} \to \infty$. Ma essendo $y_n \in f(A)$ $\exists\, x_n \in A$ tale che $f(x_n) = y_n$. Come prima posso estrarre (x_{n_k}) tale che $x_{n_k} \to x \in A \Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(x)$ dunque $y_{n_k} \to f(x)$. MA ALLORA $\|y_{n_k}\| \to \|f(x)\|$ e questo è impossibile dato che $\|y_{n_k}\| \to \infty$.

FINE

NEL CASO $M=1$ TROVO WEIERSTRASS PERCHÉ trovo che A limitato e chiuso $\Rightarrow f(A)$ limitato e chiuso in $\mathbb{R}$

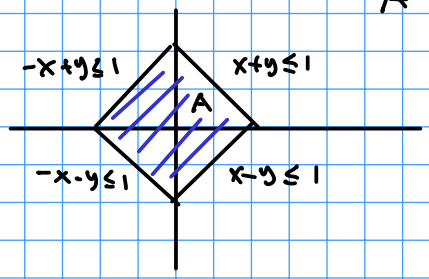
MA OGNI INSIEME CHIUSO E LIMITATO IN $\mathbb{R}$ HA MASSIMO E MINIMO.

DIRE CHE $f(A)$ ho max/min $\Leftrightarrow$ tesi di Weierstrass.

DUNQUE Se prendo per esempio $f(x,y) = x^2 + 4y^4$

su $A = \{|x|+|y| \le 1\}$ SONO SICURO CHE

che esistono $\max_A f$, $\min_A f$



A è chiuso dato da $g(x,y) = |x|+|y|$ è continua

si vede che $A \subset \overline{B(0,1)} \Rightarrow A$ è limitato

È chiaro che $\min_A f = 0$ dato che $f(x,y) \ge 0$

e $(0,0) \in A$, $f(0,0) = 0$

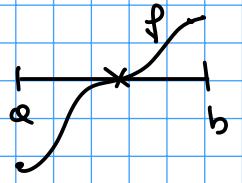
TROVARÒ IL MAX NON (al momento) SEMPLICE

VEDREMO che i punti di max si trovano su ∂A

$= \{|x|+|y|=1\}$ . . .

Equivalente del teorema degli zeri ?!

In una variabile:



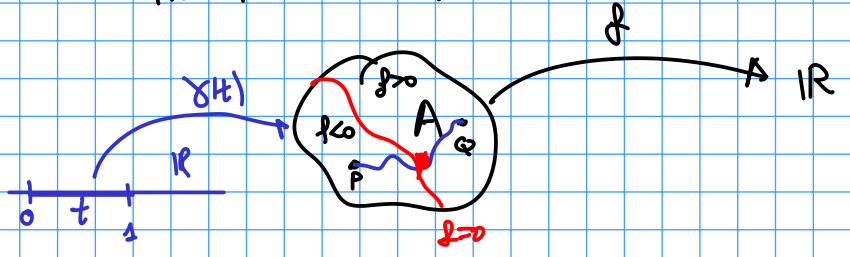
f continua $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\exists x \in]a,b[: f(x) = 0$

IN PIÙ VARIABILI:



$P, Q \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$ continua, $f(P) < 0$, $f(Q) > 0$

Allora per ogni "curva" $\gamma: [0,1] \to A$, γ continua

$\gamma(0) = P$ $\gamma(1) = Q$ $\Rightarrow \exists\, t \in]0,1[$ per cui $f(\gamma(t)) = 0$

(Segue dal teorema in una variabile, applicato a $g(\gamma(t))$)