Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 06 04/10/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Riprendiamo dalla nozione di limite in X spazio vettoriale normato ($\|\ \|$ è la norma)

Ricordo $A \subset X$ $f: A \to X_1$ $x_0 \in X$, x_0 di acc. per A

$\ell \in X_1$. Dico che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists r > 0$ tale che $x \in B(x_0, r)$, $x \in A$, $x \neq x_0$

$\Rightarrow f(x) \in B(\ell, \varepsilon)$

È LO STESSO CHE SCRIVERE:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists r > 0$ t.c. se $\|x - x_0\| < r$, $x \in A$, $x \neq x_0$

$\Rightarrow \|f(x) - \ell\|_1 < \varepsilon$

PER ABBREVIARE SI PUÒ SCRIVERE $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell$

o (se x_0 è chiaro dal contesto) $f(x) \to \ell$ INVECE

di $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Si legge: "$f(x)$ tende a ℓ"

per "x che tende a x_0" OPPURE

"il limite di $f(x)$ ... è ℓ" È BRUTTO "il limite tende"

CASI SPECIALI quando $X = \mathbb{R}$ oppure $X_1 = \mathbb{R}$

$X = \mathbb{R}$ Posso definire

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \quad / \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad / \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

IMITANDO LE DEFINIZIONI DI ANALISI I (VEDI NOTE)

Per esempio

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ vuol dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. se } x_0 < x < x_0 + \delta, x \in A \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_1 < \varepsilon$$

Per esempio

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. se } x > c, x \in A \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_1 < \varepsilon$$

$X_1 = \mathbb{R}$ Posso definire le nozioni

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad / -\infty$$

cioè

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad \exists r > 0 \text{ t.c. } \|x - x_0\| < r, x \in A, x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > c \quad / \quad f(x) < c$$

Se poi $X = X_1 = \mathbb{R}$ si può fare tutto (vedi Analisi I)

C'È ANCHE UNA DEF. DI "LIMITE A ∞"

$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = l$ significa (∞ è di acc. per A cioè $\forall M \exists x \in A$ con $\|x\| > M$)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \in \mathbb{R}$ tale che se $\|x\| > c$, $x \in A \Rightarrow$

$$\|f(x) - l\|_1 < \varepsilon$$

Se poi $X_1 = \mathbb{R}$

$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty / -\infty$ SIGNIFICA

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $\|x\| \geq c$, $x \in A \Rightarrow f(x) > M \,/\, f(x) < M$

ESEMPI IN $\mathbb{R}^2$ I punti di $\mathbb{R}^2$ sono del tipo (x,y)

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{1}{x^2+4y^2} = 0 \quad (\star)$$

In questo caso $f : A \to \mathbb{R}$, dove $A = \{(x,y) \neq (0,0)\}$.

Perché il limite scritto sopra abbia senso l'insieme A deve contenere punti (x,y) con $\|(x,y)\|$ grande a piacere e questo è vero! Verifico $(\star)$.

- USANDO LA DEF.

Fisso $\varepsilon > 0$ devo trovare $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall (x,y) \text{ con } (x,y) \neq (0,0),\ \|(x,y)\| \geq c \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2+4y^2}\right| < \varepsilon$$

BASTA PRENDERE $x^2+y^2 > \frac{1}{\varepsilon}$ cioè $\|(x,y)\| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x^2+4y^2} < \varepsilon$$

(se il denominatore aumenta $\Rightarrow$ la frazione diminuisce)

- ALTRO MODO (simile)

$0 \le \frac{1}{x^2+4y^2} \le \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{\|(x,y)\|^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2+4x^4} \to 0$

$0 \downarrow$ $\qquad$ $\downarrow 0$

SE SO che $\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{1}{\|x\|} = 0$ (FATTO GENERALE)

E SE SO IL "TEOREMA DEL CONFRONTO" RICAVO LA TESI

ALTRO ESEMPIO $\qquad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$

DUNQUE $\quad A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \{(x,y) : (x,y) \neq (0,0)\}$.

$(0,0)$ è di accumulazione per A. Basta notare che

$x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = 0$, allora $(x_n, y_n) \in A$ e $(x_n, y_n) \to (0,0)$

($(0,0)$ è limite di una successione di punti di A diversi da $(0,0) \longrightarrow (0,0)$ è di accumulazione per A)

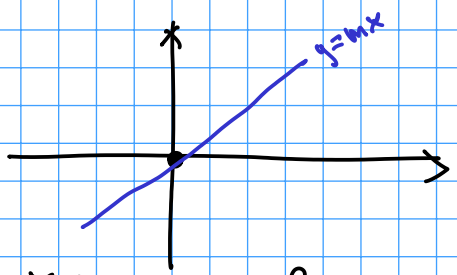
HA SENSO CHIEDERSI SE ESISTE

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = ?!$ (finito o $\pm$ infinito. N.B. $X_1 = \mathbb{R}$)

PER "INDOVINARE" L'EVENTUALE LIMITE POSSIAMO PASSARE A DELLE OPPORTUNE RESTRIZIONI. LA COSA PIU' SEMPLICE È GUARDARE LA RESTRIZIONE SULLE RETTE USCENTI DA $(0,0)$

Fisso $m \in \mathbb{R}$ e considero

$B = \{(x, mx) \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0\} \subset A$



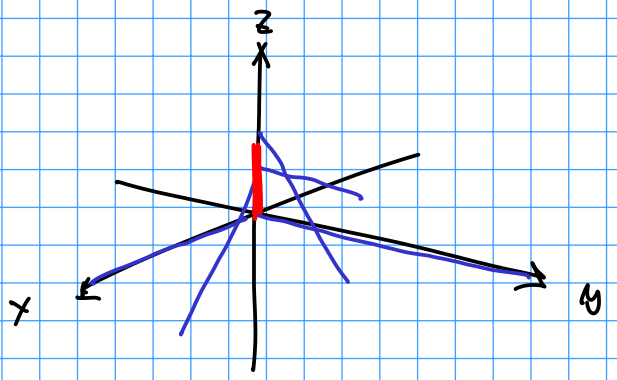
$(0,0)$ è di acc. per B $\left(\frac{1}{n}(1,m) \to (0,0)\right)$

Se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \ell \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x\,mx}{x^2+(mx)^2} = \ell$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \ell$ IMPOSSIBILE PERCHÉ ℓ dovrebbe essere un numero che verifica l'uguaglianza $\forall m \in \mathbb{R}$

A SECONDA DELLA RETTA (variando m) IL LIMITE DELLA RESTRIZIONE CAMBIA

$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$



$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = ?!$ (f è definita su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, a valori reali, $(0,0)$ di acc.)

Proviamo a fare i limiti sulle restrizioni alle rette (COME NELL'ESEMPIO DI PRIMA). FISSO $m \in \mathbb{R}$ e calcolo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 mx}{x^4+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2}\frac{m}{x^2+m^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} x\frac{m}{x^2+m^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } m=0 \\ 0\cdot\frac{m}{m^2}=0 & \text{se } m\neq 0 \end{cases}$$

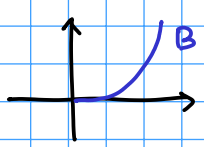
POTREBBE ESSERE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = 0$ (altri valori non sono possibili)

Se si prova ad applicare la def. non si riesce a concludere...

ANCHE IN QUESTO CASO IL <u>LIMITE NON ESISTE</u>.

Lo vedo considerando un'altra restrizione su

$B = \{(x,y) : y = x^2, x\neq 0\}$



Se mi metto su B devo calcolare

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

DI NUOVO NON ESISTE IL LIMITE.

Morale Per fare i limiti $(x,y)\to(0,0)$ non basta "esplorare" i punti vicini a $(0,0)$ su delle curve particolari

---

ESEMPIO 3 $\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = f(x,y)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

"ESPLORO SULLE RETTE" $y = mx$

Passo al $\lim_{x\to 0} \dfrac{m x^3}{(1+m^2)x^2} = \lim_{x\to 0} x \cdot \dfrac{m}{1+m^2} = 0 \quad \forall m$

DUNQUE MI CHIEDO SE

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$ **SÌ**

Per vederlo conviene usare la disuguaglianza (UTILE)

✡ $|xy| \le \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$ DA RICORDARE

Se la diamo per buona si ha

$$0 \le \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|xy|}{x^2+y^2}|x| \le \frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2}|x| = \frac{1}{2}|x|$$

Io so che (e vedremo ho un momento)

$$\lim_{(x,y)\to 0} x = 0 \qquad \left(\text{in generale } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0\right)$$

Se uso IL TEOREMA DEL CONFRONTO

$$0 \le |f(x,y)| \le \frac{1}{2}|x| \to 0 \quad \Rightarrow \quad f(x,y) \to 0$$

FATTO

$2xy \le x^2+y^2 \iff x^2+y^2-2xy \ge 0 \iff (x-y)^2 \ge 0$

$-2xy \le x^2+y^2 \iff x^2+y^2+2xy \ge 0 \iff (x+y)^2 \ge 0$

$\Updownarrow$

$2|xy| \le x^2+y^2$ ★

PROPRIETÀ DEI LIMITI (simili a quelle viste in Analisi 1)

Teorema $A \subset X$ x_0 di acc. per A, $f, g : A \to X_1$ $(X \to X_1)$

- Se $f(x) \to \ell \Rightarrow$ f è limitata in un intorno di x_0 $B(x_0,r)\cap A$
- $f(x) \to \ell_1$ $g(x) \to \ell_2 \Rightarrow f(x)+g(x) \to \ell_1+\ell_2$
  $(\ell_1, \ell_2 \in X_1)$
- $f(x) \to \ell$, $\lambda(x) \to \lambda$ $(\lambda : A \to \mathbb{R}) \Rightarrow$
  $\lambda(x) f(x) \to \lambda \ell$
- Se $X = \mathbb{R}^N$ $\quad x = (x_1 \dots x_N)$
  $\lim_{x \to x_0} x_i = x_{0,i} \qquad \forall i = 1 \dots N$

- (permanenza del segno) $X_1 = \mathbb{R}$
  Se $f(x) \to \ell$ $(\in \mathbb{R})$ $\quad$ se $\ell > 0 \Rightarrow$
  $\exists r > 0$ tale che $f(x) > 0$ $\forall x \in B(x_0,r)\cap A$, $x \neq x_0$
  $(\forall x$ tale che $\|x-x_0\| < r$, $x \in A$, $x \neq x_0)$

- (teorema del confronto - dei due carabinieri) $X_1 = \mathbb{R}$

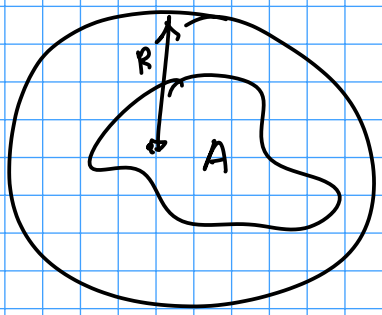
  Se $f(x) \le g(x) \le h(x) \qquad \forall x \neq x_0$

  Se $f(x) \to \ell$, $h(x) \to \ell \qquad (\ell \in \mathbb{R})$

  Allora $g(x) \to \ell \qquad (x \to x_0)$

- Se $f(x)$ è limitata e $g(x) \to 0$,
  e una è scalare $\Rightarrow$ $f(x) \cdot g(x) \to 0$

DEF · $A \subset X$ si dice limitato se esiste $R > 0$ tale che $\|x\| \le R \quad \forall x \in A$



· Una funzione $f: A \to X_1$ si dice limitata se esiste $R_1 > 0$ tale che $\|f(x)\|_{X_1} \le R_1 \quad \forall x \in A$

Cioè se $f(A)$ è limitata (come insieme) in X_1.

ALTRE PROP. (Prodotto scalare)

· $f(x) \to \ell_1$, $g(x) \to \ell_2$ (X_1 generico)

$\Rightarrow$ $f(x) \cdot g(x) \to \ell_1 \cdot \ell_2$

(PROD. SCALARE)

· Se $f(x)$ limitata, $g(x) \to 0$ (tutto è dove $X \to X_1$)

$\Rightarrow$ $f(x) \cdot g(x) \to 0$

(IN QUESTI DISCORSI, LIMITI SONO FINITI)

Per i casi infiniti valgono le solite regole. (compreso l'esistenza delle forme indeterminate)

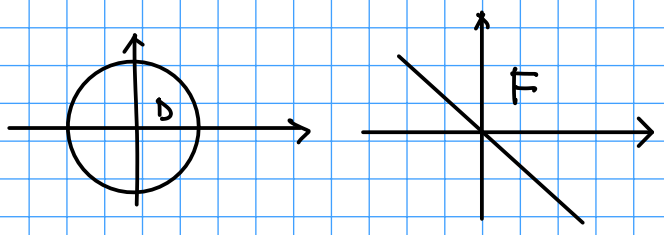
ESERCIZIO SULLE FRONTIERE (e c. ...)

$A = \{ x^2 + y^2 \le 1, \; x + y > 0 \}$ $\quad (\subset \mathbb{R}^2)$

Voglio sapere chi sono

$\overline{A}$, $\mathring{A}$, ∂A

A è l'intersezione tra il disco $D = \{x^2 + y^2 \le 1\}$ e $F = \{x + y > 0\}$



Vedo che D è chiuso $\partial D = \{x^2+y^2 = 1\}$ $\overset{\circ}{D} = \{x^2+y^2<1\}$

F è aperto $\partial F = \{x+y=0\}$ $\overline{F} = \{x+y \geq 0\}$

(da verificare) D l'abbiamo già visto

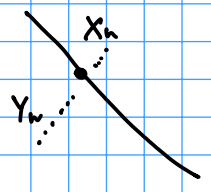
Per quanto riguarda F

- F aperto (lo vedremo per motivi generali)
- $\partial F = \{x+y=0\}$ $\qquad \partial\{x+y>0\} = \{x+y=0\}$

dim. Uso il seguente fatto (caratterizzazione per successioni)

Fatto Dato un insieme $E \subset X$

$$x_0 \in \partial E \iff \begin{cases} \exists (x_n) \text{ in } E \text{ tale che } x_n \to x_0 \\ \exists (y_n) \text{ in } \complement E \text{ tale che } y_n \to x_0 \end{cases}$$



DIAMO PER BUONO QUESTO FATTO.

LO APPLICO A F.

(1) Se (x,y) verifica $x+y=0$ posso prendere

$$X_n = \left(x+\frac{1}{n}, y\right) \qquad Y_n = \left(x-\frac{1}{n}, y\right)$$

$X_n \in F$ (perché $\left(x+\frac{1}{n}\right)+y = x+y+\frac{1}{n} = \frac{1}{n} > 0$)

$Y \in \complement F$ (perché $\left(x-\frac{1}{n}\right)+y = x+y-\frac{1}{n} = -\frac{1}{n} < 0$)

$X_n \to (x,y)$ $Y_n \to (x,y)$ $\Rightarrow (x,y) \in \partial F$

(2) VICEVERSA se $(x_0,y_0) \in \partial F$ so che $\exists (X_n)$ in F e (Y_n) in $\complement(F)$ tali che $X_n \to (x,y)$ $Y_n \to (x_0,y_0)$

Se $X_n = (x'_n, y'_n)$ deve essere $x'_n + y'_n > 0$

e $x'_n \to x_0 \quad y'_n \to y_0 \implies$

$x'_n + y'_n \longrightarrow x_0 + y_0 \implies x_0 + y_0 \geq 0$

Per lo stesso motivo $Y_n = (x''_n, y''_n)$ con $x''_n + y''_n \leq 0$

e $x''_n \to x_0, \quad y''_n \to y_0 \Rightarrow x''_n + y''_n \to x_0 + y_0$

$\Rightarrow x_0 + y_0 \leq 0$ DUNQUE $x_0 + y_0 = 0$ FINE

$\partial\{x+y>0\} = \{x+y=0\} \Rightarrow \overline{\{x+y>0\}} = \{x+y>0\} \cup \{x+y=0\}$

$= \{x+y \geq 0\}$