Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 05 03/10/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Esercizi sulle forme quadratiche

(2) $\phi(x,y) = -x^2 + 2\sqrt{2}\,xy - 2y^2$ $\quad$ (su $\mathbb{R}^2$)

La matrice corrispondente è $A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$ ← (X)

(e l'applicazione bilineare simmetrica associata a ϕ è

$b((x,y),(x',y')) = -xx' + \sqrt{2}\,xy' + \sqrt{2}\,x'y - 2yy'$

IN REALTÀ ϕ "proviene" da una qualunque b del tipo

$b((x,y),(x',y')) = -xx' + \alpha\,xy' + \beta\,x'y - 2yy'$ con

$\alpha + \beta = 2\sqrt{2}$

UNA QUALUNQUE b di questo tipo ha la proprietà

$b((x,y),(x,y)) = -x^2 + 2\sqrt{2}\,xy - 2y^2$

SE VOGLIO b simmetrica devo prendere $\alpha = \beta = \sqrt{2}$

VOGLIO VEDERE LA "SEGNATURA" DI ϕ (mediante il criterio di Sylvester).

$\det A = (-1)(-2) - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 0$

(non hanno il criterio per "definita >0" / "def. <0"

Vediamo se è verificato il criterio per ≥ 0 / ≤ 0.

Devo controllare i segni dei "minori principali" (def.) che sono, oltre a tutto A, i (a_{11}) e (a_{22})

$a_{11} = -1 \leq 0$ $\quad a_{22} = -2 \leq 0$

$\det A = 0 \geq 0$) ← SEMIDET NEGATIVA

LA FORMA È SEMIDEF. ≤ 0.

Per completezza calcoliamo esplicitamente gli autov./autoss.

POLINOMIO CARATT. $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-\lambda \end{pmatrix}$

$= (1+\lambda)(2+\lambda) - 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 - 2 = \lambda^2 + 3\lambda = (\lambda+3)\lambda$

AUTOVAL. $\lambda_1 = 0$ $\quad \lambda_2 = -3$ (ENTRAMBI ≤ 0 - TORNA!)

AUTOVETTORI $\boxed{\lambda_1 = 0}$ $\quad e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -x + \sqrt{2}y = 0 \\ \sqrt{2}x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}y$ $\quad$ per es. $e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

- SE LO VOGLIO DI NORMA 1 devo prendere $\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda_1 = -3}$ $\quad$ Devo cercare $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} -1+3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x + \sqrt{2}y = 0 \\ \sqrt{2}x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -\sqrt{2}x$ $\quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\quad \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

NOTA $\quad e_1 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ (TORNA!)

Si sarebbe potuto semplicemente cercare e_2 con $e_1 \cdot e_2 = 0$ (dato che siamo in dimensione $N = 2$!

DUNQUE se mi metto nella base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$

e chiamo $(\bar{x}, \bar{y})$ le coordinate di (x, y) in questa base

$$\phi(x,y) = \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 = -3(\bar{y})^2$$

---

(3) $\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

CRITERIO DI SYLVESTER (FORMA CON MINORI DOMINANTI)

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3$
- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3$
- $\det(1) = 1$

NON È NÉ >0 NÉ <0

(DATO CHE $\det A \neq 0$

A non ha autov. nulli)

$\Rightarrow$ SICURAMENTE HA UN AUTOV. >0 e UNO <0

INDEFINITA

Facciamo i conti per trovare gli autovalori.

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right]$. $P(\lambda)=0 \iff \lambda = 1$ OPPURE $(1-\lambda)^2 = 4 \iff$

$\lambda = 1$, $1-\lambda = \pm 2$, $\iff \lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = 3$ (DUE >0, UNO <0)

TROVO GLI AUTOVETTORI

$\lambda = 1$

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ 2x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$x = y = 0$ e qualunque z $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

$z = 0$, $x = -y$ $\quad e_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$ $\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$ $z = 0$, $x = y$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

DUNQUE IN NEL SOTTOSPAZIO $\mathrm{span}(e_1, e_3) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
(di dimensione 2) e ϕ è definita > 0

Mentre di $\mathrm{span}(e_2) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e ϕ è < 0

(4) $\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

SYLVESTER:

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = 1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} > 0$ (1)
- $\det \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$
- $\det(1) = 1 > 0$

DUNQUE ϕ È DEFINITA > 0

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 + \frac{1}{4} - (1-\lambda)\frac{3}{4} =$$

$$1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \frac{9}{4}\lambda + \frac{1}{2}$$

SI VEDE CHE HA RADICI $\lambda = 2$ $\lambda = \frac{1}{2}$ (DOPPIA)
(PROVO A "OCCHIO" $P(2) = 0$ e poi Ruffini).

TORNA: → 3 autovalori > 0