Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 04 02/10/17

(*) ricevimento il venerdì alle 10.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

X spazio vettoriale.

Chiamo <u>norma</u> su X una funzione $X \mapsto \|x\|$ da X in $\mathbb{R}$ tale che

- $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|tx\| = |t| \, \|x\|$ (omogeneità della norma)
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disuguaglianza triangolare)

- Se in X c'è un prodotto scalare $\to$ norma $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$
- Dato una norma introduco la "<u>distanza</u>" tra i punti

$$d(x,y) = \|x-y\| \qquad x, y \in X$$

- In $\mathbb{R}^N$ la norma è riconducibile al prodotto scalare:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \quad \Rightarrow \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{1/2} \qquad \text{(NORMA EUCLIDEA)}$$

$$d(x,y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_N - x_N)^2} \qquad \text{(distanza euclidea)}$$

Se $N=1$ trovo $d(x,y) = |x-y|$

Dato uno spazio vettoriale posso introdurre il concetto di limite. FACCIO UN PO' DI DEF PRELIMINARI

X spazio vett. fissato con una norma $\|\cdot\|$
(X spazio normato)

Def. Dato $x_0 \in X$ e $r > 0$ scrivo

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$$

(disco aperto di centro x_0 e raggio r)

Def. Dato un insieme $A \subset X$ e un punto $x_0 \in X$ dico che

- x_0 è INTERNO ad A se $\exists\, r > 0$ per cui $B(x_0, r) \subset A$

- x_0 è ESTERNO ad A se $\exists\, r > 0$ tale che

$$B(x_0, r) \cap A = \phi$$

- x_0 è DI FRONTIERA per A se non è né interno né esterno ad A.

CHIAMO · PARTE INTERNA DI A l'insieme

$$\mathring{A} = \{x \in X : x \text{ è interno ad } A\}$$

· PARTE ESTERNA DI A l'insieme

$$\mathring{\complement A} = \{x \in X : x \text{ è esterno ad } A\}$$

· FRONTIERA DI A l'insieme

$$\partial A = \{x \in X : x \text{ è di frontiera}\}$$

($\complement A$ = complementare di A = $\{x : x \notin A\}$)

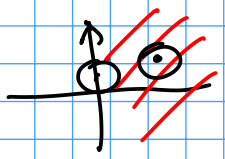
FATTI · $\mathring{A}$, $\overset{\circ}{\complement A}$, ∂A sono disgiunti

· x_0 è di frontiera $\Leftrightarrow$ $\forall r>0$ $\exists x' \in B(x_0,r)\cap A$

$\exists x'' \in B(x_0,r)\cap \complement A$

Def. A si dice APERTO se tutti i punti di A sono interni ad A $\Leftrightarrow$ $A = \mathring{A}$

Per esempio in $\mathbb{R}^2$ l'insieme $\{(x,y) : x>0\}$ è aperto



Def. Dico che x_0 è ADERENTE ad A se

$\forall r>0$ $\exists x \in B(x_0,r)\cap A$

(per ogni raggio >0 dove un punto di A dentro $B(x_0,r)$)

Nell'esempio sopra i punti con $x=0$ (non sono in $\{x>0\}$ ma) sono aderenti a $\{x>0\}$

Si vede che x_0 ADERENTE AD A $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_0 \in \mathring{A} \\ x_0 \in \partial A \end{cases}$

CHIAMO CHIUSURA di A l'insieme

$\overline{A} = \{x \text{ aderenti ad } A\} = \mathring{A} \cup \partial A$

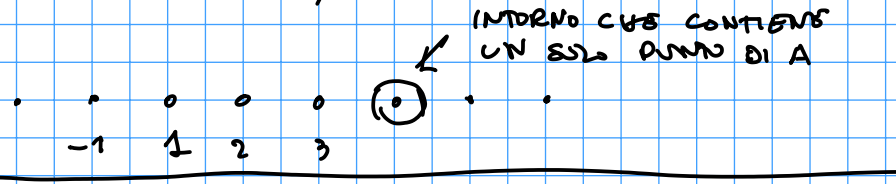
Es. $\overline{\{x>0\}} = \{x \geq 0\}$ (si vede)

È chiaro che $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$

Def. Chiamo PUNTO DI ACCUMULAZIONE per A un pto x_0 tale che $\forall r>0$ $\exists x' \in B(x_0,r)\cap A$, $x' \neq x_0$

Se $x_0 \in A$ e x_0 non è di accumulazione per A dico che x_0 è PUNTO ISOLATO in A

Per es. se $X = \mathbb{R}$ $A = \{\text{numeri interi}\}$ allora tutti i punti di A sono isolati (A NON HA PUNTI DI ACCUMULAZIONE)



DEFINIZIONE DI LIMITE

X, X_1 spazi vettoriali con una norma $\|\cdot\|$, $\|\|_1$

f una funzione $f: A \to X_1$ $A \subset X$

(A è il dominio di f) . $x_0 \in X$ di accumulazione per A. $\ell \in X_1$. DICO che ℓ è limite per x che tende a x_0 di $f(x)$:

$$\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che:

se $\|x - x_0\| < \delta$, $x \in A$, $x \neq x_0 \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_1 < \varepsilon$

COME IN ANALISI CON $\|\cdot\|$ al posto di $|\cdot|$

QUESTA DEF. di limite ha (quasi tutte) le "vecchie" proprietà.

UNICITÀ Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$

$\Rightarrow \ell = \ell_1$

(NO DIM.)

LINEARITÀ . Se $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = \ell_2$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left(f_1(x) + f_2(x) \right) = \ell_1 + \ell_2$

. $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left(\lambda f_1(x) \right) = \lambda \ell_1$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Se $X_1 = \mathbb{R}^M$ e se $f: A \to \mathbb{R}^M$, allora

$f = (f_1 \dots f_M)$ $\quad f_1 \dots f_M \in \mathbb{R}$ (sono le COMPONENTI DI f)

- <u>ALLORA</u> $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff$

$\lim_{x \to x_0} f_i(x) = \ell_i \quad (\ell = (\ell_1 \dots \ell_M))$

$i = 1 \dots M$

- Se $f: A \to X_1$ $\quad \underline{B \subset A} \subset X$ posso considerare la "RESTRIZIONE" di f a B definita da

$f|_B(x) = f(x) \quad \forall x \in B$

<u>ALLORA</u> Se x_0 è di accumulazione per B ($\Rightarrow$ è di acc. per A) e

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f|_B(x) = \ell$

<u>Def.</u> CHIAMO "SUCCESSIONE" di punti di A una funzione $a: \mathbb{N} \to A$ (una funzione definita sui numeri interi a valori in A).

CONVENZIONE: Scrivo a_n INVECE DI $a(n)$ e scrivo (a_n) invece di a

Se (a_n) è una successione posso fare il limite per $n \to \infty$:

$\ell = \lim_{n \to \infty} a_n \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}: \forall n \geq \bar{n}$

$\|a_n - \ell\|_1 < \varepsilon$

Teorema $A \subset X$ $x_0 \in X$ $f: A \to X_1$.

(1) x_0 è un punto di accumulazione per $A \iff$

esiste una succ. (a_n) di punti di A tale che

$\lim_{n\to\infty} a_n = x$, $a_n \neq x_0$ $(a_n \in A)$ $\forall n$

(2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff$

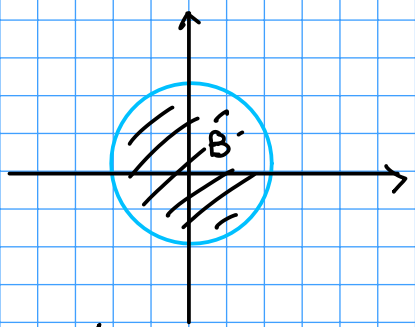
Per ogni successione (a_n) di punti di A, $a_n \neq x_0$

tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$

ESEMPI IN $X = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \quad x,y \in \mathbb{R}\}$

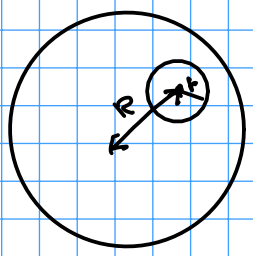
Prendo $B = \{x^2 + y^2 < 1\}$

(disco di centro $(0,0)$ e raggio 1)



(1) I punti interni a B sono tutti (e soli) i punti di B. INFATTI se $(x,y) \in B \implies x^2 + y^2 < 1$

R^2



Posso prendere r in modo che $R + r < 1$

Si vede facilmente che $B((x,y), r) \subset B$

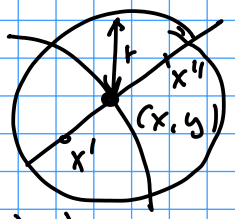
DUNQUE (x,y) è interno : $B \subset \mathring{B}$

È SEMPRE VERO CHE $\mathring{B} \subset B$ DUNQUE

$\mathring{B} = B$ (B è aperto)

- CHI È ∂B ?! $\boxed{\partial B = \{x^2 + y^2 = 1\}}$

IN EFFETTI se $x_0^2+y_0^2=1$ e se $r>0$



allora trovo $P' = (t'x, t'y)$

con $t' = 1-\frac{r}{2}$ $\quad 1-r < t' < 1$

$\Rightarrow \quad \|(x,y) - P'\| = \frac{r}{2} < r \Rightarrow P' \in B((x,y),r)$

e $P' \in B$

ANALOGAMENTE $P'' = (t''x, t''y)$ con $t'' = 1+\frac{r}{2}$

$\Rightarrow \|(x,y) - P''\| = \frac{r}{2} \Rightarrow P'' \in B((x,y),r)$

e $P'' \notin B$

HO DIMOSTRATO CHE I PUNTI DELLA CIRCONFERENZA SONO PUNTI DI FRONTIERA

VICEVERSA devo mostrare che i punti di frontiera hanno tutti la proprietà $x^2+y^2=1$.

IN FATTI se non fosse vero $\Rightarrow$

- $x^2+y^2<1$ (ma allora (x,y) è interno)
- $x^2+y^2>0$, ragionando come prima $\Rightarrow (x,y)$ è esterno

DUNQUE se (x,y) è di frontiera $\Rightarrow x^2+y^2=1$

FINE $\quad \partial B = \{x^2+y^2=1\}$.

OSS. Se avessi preso $D = \{x^2+y^2 \le 1\}$ $(= B \cup \partial B)$

$\Rightarrow$ - D è chiuso
- $\partial B = \partial\{x^2+y^2=1\} = \partial B$

ATTENZIONE CI SONO INSIEMI CHE NON SONO NÉ APERTI NÉ CHIUSI.

$E = \{x^2+y^2 \le 1,\ x>0\}$

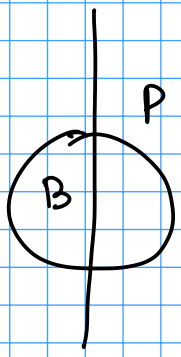
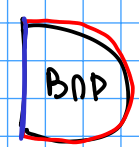
$\partial E = \{(0,y) \ |y|\le 1\} \cup \{x^2+y^2=1\}$

E NON È NÉ APERTO NÉ CHIUSO (CHIUSI)

PROP. $A, B \subset X$. Se $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ($\Leftarrow$ A, B CHIUSI)

$$\Rightarrow \quad \partial(A \cap B) = (\partial A) \cap B \cup A \cap (\partial B)$$

Per esempio $B = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\quad P = \{x \geq 0\}$

$\partial B = \{x^2 + y^2 = 1\}$ $\quad \partial P = \{x = 0\}$

Allora $\partial(B \cap P) = \underbrace{(\partial B) \cap P}_{= \{x^2+y^2=1,\, x \geq 0\}} \cup \underbrace{B \cap (\partial P)}_{= \{x^2+y^2 \leq 1,\, x=0\}}$